I. Balmuş, Gh. Ceban, A. Leahu,
I. Lisnic, A. Moloşniuc

Teoria Probabilităţilor şi a Informaţiei în Sistemul de programe Mathematica

(Teorie, indicatii metodice si probleme propuse)

Chisinau
2017

CZU

Manualul este destinat studenților din cadrul Facultății de *Calculatoare, Informatică şi Microelectronică* la studierea cursului Matematici Speciale, dar poate fi folosit şi de studenții altor facultăți ai UTM la studiul Matematicii Superioare. S-a pus accentul nu numai pe acele noțiuni fundamentale care reflectă adecvat ştiința Teoriei Probabilităților şi a Informației dar şi oferă viitorilor specialişti în Tehnologii Informaționale, Securitatea Informației, Calculatoare, Automatică şi Informatică, Microelectronică şi Nanotehnologii unele instrumente probabilistice cu largi posibilități de aplicație în domeniile corespunzătoare de activitate. Sunt expuse unele considerente de ordin general asupra Sistemului de Programe Mathematica.

Autori: conf. univ., dr. I. Balmuş
lect. sup. Gh Ceban
conf. univ., dr. A. Leahu
lect. univ. I. Lisnic

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII

ISBN

CUPRINS

Motto. *Matematica este arta de a da lucrurilor diferite unul şi acelaşi nume.*
Henri Poincare (1854-1912)

1. INTRODUCERE

1.1. Obiectul de studiu al Teoriei Probabilităţiilor

Apariţia Teoriei Probabilităţilor ca ramură a Matematicii datează din sec. XVII şi este legată de numele marilor matematicieni Blaise Pascal (1623-1662), Pierre Fermat (1601-1665), Christian Huygens (1629-1695) şi Jacob Bernoulli (1654-1705), plecînd de la rezolvarea unor probleme legate de jocurile de noroc. Necesitatea de a largi aria de aplicabilitate a acestei teorii a condus la varianta ei modernă şi anume, Teoria axiomatică a Probabilităţilor, propusă în anul 1933 de către matematicianul rus Andrei Nikolaevici Kolmogorov (1903-1987).

Dacă e să ne referim la obiectul de studiu, putem spune ***că Teoria Probabilităţilor studiază modele matematice ale fenomenelor (experimentelor) aleatoare întâmplătoare, stochastice sau indeterministe, cum li se mai spune)***. Aici se impun unele lămuriri suplimentare.

Mulţimea de fenomene care se întâlnesc în lumea înconjurătoare se împarte în două clase: *fenomene deterministe* şi *fenomene indeterministe* sau, cu alte cuvinte, *fenomene aleatoare.*

Spunem, astfel, că *fenomenul este determinist dacă observatorul poate anticipa cu certitudine evoluţia acestuia.* În calitate de exemplu putem lua fenomenul atracţiei universale. Observaţiile făcute asupra acestui fenomen i-au permis marelui matematician şi fizician englez Isaac Newton (1642-1727) să descopere *Legea Atracţiei Universale:*

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Această formulă reprezintă un exemplu tipic de model matematic al unui fenomen (în cazul dat, determinist). Ea ne arată că, forţa F de atracţie dintre două corpuri, unul de masă m_1 , altul de masa m_2 , este direct proporţională cu produsul $k \cdot m_1 \cdot m_2$ şi invers proporţională cu pătratul distanţei r dintre aceste corpuri, unde k este o constantă universală.

Putem spune, aşadar, că ***a modela matematic , spre a fi cercetat, un fenomen (experiment, eveniment sau obiect oarecare) înseamnă a-l descrie, fie şi aproximativ, cu ajutorul noțiunilor şi formulelor matematice, cu alte cuvinte, a-l descrie în limbajul matematic***.

De altfel, unul şi acelaşi model matematic poate descrie două sau mai multe fenomene, în esență, diferite. De exemplu, formula de mai sus serveşte în calitate de model matematic şi pentru fenomenul atracției dintre două particule elementare (Legea lui Coulomb).

Dimpotrivă, spunem despre *un fenomen că este indeterminist (aleator) dacă observatorul fenomenului nu poate anticipa cu certitudine evoluția lui.* Din punct de vedere al observatorului, observațiile făcute asupra unui fenomen sau măsurătorile corespunzătoare echivalează cu efectuarea unui experiment legat de fenomenul dat. Or, prin experiment vom înțelege observarea unui fenomen dat. *Experimentele indeterministe se împart*, la rîndul lor, *în două subclase*: *(a) experimente indeterministe (aleatoare), care posedă proprietatea regularității statistice¸ şi (b) experimente aleatoare care nu posedă proprietatea regularității statistice.*

Definiția 1. *Vom spune că un experiment aleator $\mathcal{E}$ posedă proprietatea regularității (stabilității) statistice dacă acesta verifică următoarele proprietăti:*

1) poate fi reprodus, ori de câte ori dorim, practic în aceleaşi condiții;

2) pentru orice eveniment A asociat lui $\mathcal{E}$ frecvența lui relativă în n probe, adică $f_n(A)$=numărul de probe în care s-a produs A raportat la numărul total de probe=n(A)/n, oscilează în jurul unui număr notat cu P(A), P(A) ia valori din [0,1], $f_n(A)$ devenind, odată cu creşterea lui v, „tot mai aproape ¸şi mai aproape de P(A)”;

3) pentru două serii diferite, respectiv de n şi m probe, atunci când n şi m sunt foarte mari, avem că $f_n(A)$ coincide aproximativ cu $f_m(A)$.

În concluzie, stabilitatea statistică a frecvențelor relative conferă verosimilitate ipotezei, conform căreia pentru orice eveniment *A*, posibil ca rezultat observabil al unui experiment aleator $\mathcal{E}$, putem defini numărul ***P(A)*** cu ajutorul căruia măsurăm gradul (şansele) de realizare a lui *A* într-un număr foarte mare de probe. Astfel, în Teoria probabilităților devine postulat afirmația, conform căreia pentru orice eveniment *A* asociat unui experiment aleator $\mathcal{E}$ există (în mod ***obiectiv***) un număr ***P(A),*** numit probabilitate a lui *A*. Proprietatea firească a acestui număr rezidă în faptul că, odată cu creşterea numărului *n* de probe (experimente) independente, frecvența relativă $f_n(A)$ se apropie, tot mai mult şi mai mult, de ***P(A)***.

Numărul P(A) se numeşte probabilitate statistică (sau frecvențială) a evenimentului A.

Exemplu. Considerăm, în calitate de experiment aleator $\mathcal{E}$, aruncarea monedei o singură dată. Fie *A* evenimentul ce constă în apariția stemei. Observăm, astfel, că $f_{1000}(A)$ coincide aproximativ cu *1/2* adică $P(A)=1/2$, iar $f_{2000}(A)$ coincide, la fel, aproximativ cu *1/2*, adică probabilitatea $P(A)=1/2$. Prin urmare, putem afirma că probabilitatea (statistică) a apariției stemei la aruncarea monedei o singură dată este egală cu *½,* ceea ce înseamnă, că aruncând moneda de un număr suficient de mare de ori, stema va apare în aproximativ 50% de cazuri .

Putem aduce şi alte exemple de fenomene aleatoare: rezultatele aruncării unui zar, greutatea unui bob de grâu ales la întâmplare, numărul de bacterii descoperite într-o picătură de apă, durata vieții unui calculator produs de întreprinderea dată, numărul de apeluri telefonice înregistrate la o stație telefonică pe durata unei zile etc., etc. Enumerarea lor poate continua fără de sfârşit, însă ele toate vor avea acelaşi caracter, fiind însoțite de astfel de noțiuni imprecise (deocamdată) ca aruncare „onestă”, monedă „perfectă”, probe independente etc.

Remarcă. ***Probabilitatea statistică nu poate fi aplicată întotdeauna, deoarece nu orice experiment poate fi repetat în condiții identice ori de câte ori dorim. Experimentele aleatoare care posedă proprietatea regulăritatii statistice țin de fenomenele de masă. Pentru studiul experimentelor care nu posedă această proprietate, putem folosi noțiunea de probabilitate subiectivă.***

Definiția 2. *Prin probabilitate subiectivă vom înțelege acea regulă P conform căreia o persoană dată îi asociază fiecărui eveniment aleatoriu A un număr P(A) din intervalul [0,1], numit probabilitatea evenimentului A.*

Astfel, putem vorbi despre probabilitatea subiectivă, evaluată, să zicem, de un expert, că până în anul 2020 se va produce prima expediție a omului pe Marte. Pentru studiul fenomenelor aleatoare indeterministe, în afară de *probabilitate subiectivă* si *probabilitate frecvențială*, există şi noțiunile de *probabilitate clasică*, *probabilitate geometrică*, *probabilitate discretă* şi *probabilitate definită în sens axiomatic*. Toate aceste noțiuni au ca scop definirea unei modalități de măsurare a şanselor (gradelor) de realizare a evenimentelor aleatoare date, definiția axiomatică a probabilității fiind, într-un anumit sens, acoperitoare pentru toate celelalte definiții.

Lucrarea dată este axată numai şi numai pe probabilități obiective, nu şi subiective.

1.2. Considerente de ordin general asupra sistemului de programe (soft-ului) Mathematica

Înainte de a trece nemijlocit la tema enunțată în denumirea paragrafului, oferim o scurtă informație privind Sistemul de programe Mathematica. La întrebarea „Cine a creat Sistemul de programe Mathematica?” putem da următorul răspuns.

Creatorul Sistemului Mathematica este **Stephen Wolfram** (S.U.A.). El s-a nascut la Londra în a. 1959. Prima lucrare ştiinţifică a elaborat-o la vârsta de 15 ani. La vârsta de 20 de ani a obținut titlul ştiinţific de Doctor în fizica teoretică. Din 1973 începe să aplice calculatorul în cercetările sale ştiinţifice. Între anii 1979 şi 1983 creează programul SMP care este primul program ce ține de domeniul Calculului simbolic. Menționăm că anterior calculatorul era, de obicei, folosit la rezolvarea problemelor din Matematica de calcul. În anul 1986, odată cu apariția primelor PC-uri, începe crearea Sistemului (pachetului de programe) Mathematica, în anul 1988 apărând prima lui variantă, Mathematica 1. Această activitate a continuat şi în anul 1991, având ca rezultat Mathematica 2; în anul 1996 a apărut Mathematica 3, iar în anul 1999 – Mathematica 4. Aceste sisteme au mai multe versiuni. În unele săli de calculatoare din U.T.M. este instalat Sistemul de programe Mathematica 5.1. Anume acest Sistem este folosit de către studenți în cadrul lucrărilor de laborator la TPI. De altfel, pe Internet poate fi accesată o variantă on-line la adresa http://www.wolframalpha.com/. Activitatea privind dezvoltarea de mai departe a Sistemului Mathematica (SM) continuă şi în prezent în cadrul firmei **Wolfram Research,** Inc, avându-l ca Preşedinte pe Stephen Wolfram. În prezent Sistemul Mathematica apare în versiunea 10.

Lucrările pe care le putem realiza cu ajutorul SM pot fi grupate în următoarele categorii:

Calcule Numerice. Rezultatele acestor calcule sunt numere. Exemple de astfel de prelucrări sunt: calculul integralei definite a unei funcții, determinarea rădăcinilor unui polinom cu coeficienți numerici, determinarea limitei unui şir numeric etc.

Calcule Simbolice. Rezultatele calculelor simbolice sunt, de regulă, expresii algebrice sau chiar propoziții matematice. Exemple de astfel de calcule sunt: calculul primitivei unei funcții, determinarea rădăcinilor unui polinom cu coeficienți simbolici, efectuarea unui raționament logic etc.

Trasarea Graficelor. Rezultatele acestor prelucrări sunt, de fapt, reprezentări grafice ale unor funcții, curbe, suprafețe sau alte obiecte grafice descrise prin ecuații sau prin punctele pe care le conțin. Pot fi create şi obiecte grafice pornind de la primitive. Soft-ul Mathematica oferă posibilitatea efectuării fiecăreia dintre aceste prelucrări.

Unele lucrări pot fi efectuate direct existând comenzi specifice, iar altele pot fi descrise în limbajul de programare specific sistemului. Spre deosebire de limbajele de programare de uz general sistemele de software matematic conțin un limbaj de comandă mult mai bogat în sensul că pot fi specificate printr-o singură comandă şi lucrări bazate pe algoritmi relativ complicați (de exemplu, inversarea unei matrice, rezolvarea simbolică sau numerică a unui sistem de ecuații diferențiale etc).

Sistemele de software matematic se pot aplica în domenii diferite, cum ar fi:

-**Matematică** (pentru verificarea unei teorii, enunțarea de noi conjecturi, elaborarea unor demonstrații care implică doar calcule de rutină sau raționamente standard, vizualizarea grafică a unor obiecte geometrice etc.);

- **Fizică** (pentru prelucrarea datelor experimentale si simularea soft a unor fenomene fizice);

-**Chimie** (pentru simularea soft a structurilor moleculare şi prelucrarea relațiilor ce descriu reacțiile chimice);

-**Statistică** (pentru vizualizarea grafică şi analiza datelor, efectuarea de inferențe statistice pornind de la date obținute din sondaje, analiza corelației dintre date etc.);

-**Inginerie** (pentru prelucrarea semnalelor şi modelarea sistemelor, proiectare asistată de calculator);

-**Biologie** şi medicină (pentru simularea fenomenelor biomecanice, prelucrarea semnalelor şi imaginilor din medicină etc.);

-**Economie şi finanțe** (pentru modelare financiară, planificare şi analiză economică, efectuare de predicții etc.)

1.2.1. Generalități

a) Începutul lucrului. În calculator este instalat corect sistemul **Mathematica**

Varianta 1. Poziția inițială: masa de lucru pe care este instalată pictograma Mathematica-5. Facem dublu clic pe pictograma Mathematica. Se lansează Sistemul Mathematica şi apare fereastra **Untitled 1** şi o paletă cu simboluri. Se poate scrie ce trebuie în această fereastră. Astfel se va începe un document. Dacă paleta nu apare, atunci ea poate fi instalată tastând: File, Paletes, 4.Basicinput.

Varianta 2. Poziția inițială: masa de lucru pe care nu este instalată pictograma Mathematica. Pentru a apela Sistemul Mathematica tastăm: Start, Programs, Mathematica 5. Apare fereastra **Untitled 1** şi poate începe lucrul cu acest sistem.

b)Tipul documentelor. Documentele în sistemul Mathematica sunt de tipul **notebook.** Ele conțin, în caz general, texte cu comentarii şi celule care conțin formule matematice şi rezultatele rezolvărilor problemelor în diferite forme, inclusiv tabele, matrice şi grafice. Denumirile funcțiilor se aseamănă cu cele obişnuite şi încep cu literă majusculă: **Sin[x], Save[eqn,x]**,...

c) Rezolvarea unei probleme. Pentru a rezolva o problemă trebuie scrisă instrucțiunea respectivă şi tastat **Shift+Enter** (sau Enter de lângă cifre, din partea dreaptă). Se afişează

In[nr.d.r] **:=instrucțiunea**

Out[nr.d.r]**=rezultatul.**

În paranteze pătrate se conține numărul de rând al problemei care s-a rezolvat în documentul curent. Dacă instrucțiunea n-a fost scrisă corect, atunci se afişează indicații în privința greşelii şi conținutul instrucțiunii.

d) Finisarea lucrului. Dacă după lucrul cu documentul dat pentru prima dată vrem să-l păstrăm, atumci tastăm : File, Save As (scriem numele dorit al documentului), Save. Astfel noul document se va salva în sistemul Mathematica. Dacă se lucrează cu un fişier vechi, atunci salvarea redacției noi a acestuia se efectuează prin tastările : File, Save. Documentul poate fi salvat şi pe un careva disc în mod obişnuit.

e) Utilizarea parantezelor. Parantezele rotunde (şi) se folosesc pentru a grupa expresii; parantezele pătrate [şi] se folosesc pentru delimitarea argumentelor funcției, iar acoladele { şi } se folosesc pentru delimitarea elementelor din listă.

f) Observație. Textul care urmează este scris în Microsoft Word. Pentru scrierea unor formule se foloseşte redactorul Equation şi de aceea literele latine sunt scrise italic. Acest text poate fi scris direct în Mathematica, unde literele se scriu normal şi în aşa fel se afişează. Folosirea redactorului Microsoft Word face ca textul să fie scris mai compact.

1.2.2. Operații aritmetice şi de calcul

În Sistemul de programe Mathematica se folosesc următoarele **notații:** **Pi** este notația numărului π; **E** este notația numărului *e*; **I** este notația numărului $i = \sqrt{-1}$; **Infinity** este notația lui ∞; **n!** este notația lui n factorial; **x + y** -- adunarea, **x – y** -- scăderea, **x/y** -- împărțirea, **x*y** sau **x y** – înmulțirea (la înmulțire între *x* şi *y* se pune sau semnul * sau spațiu liber), **–x** -- minus x, **x^y** – ridicarea la putere x^y, **x = = y** – egalitate, **x > y** – mai mare, **x < y** – mai mic, **x >= y** –mai mare sau (şi) egal, **x <= y** – mai mic sau (şi) egal, **x ≠ y** – x este diferit de y. Termenii se grupează cu ajutorul parantezelor rotunde. Se folosesc şi notații obişnuite.

La rezolvarea problemelor de aritmetică şi de calcul pot fi folosite şi funcțiile ce urmează.

Plus[x,y,...,z] – calculează suma x+y+…+z;
Times[x,y,...,z] – calculează produsul xy···z ;
Power[x,n] – calculează expresia x^n;
List[x_1,x_2,...,x_n] – creează lista $\{x_1,x_2,...,x_n\}$;
Rule[a,b] – efectuează substituția a–>b;
Set[a,b] – atribuie lui a valoarea *b*;
Prime[n] – determină al *n*-lea număr prim;
FactorInteger[n] – determină factorii primi ai numărului n şi exponenții puterilor lor;
Max[x,y,...,z] – determină cel mai mare număr din lista dată;
Min[x,y,...,z] – determină cel mai mic număr din lista dată;
Abs[x] – determină valoarea absolută a numărului real *x* şi modulul numărului complex *x*.

Exemplul 1. Se dă o expresie aritmetică :

$$\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}. \tag{1.1}$$

Se cere : a) să se determine valoarea exactă a acestei expresii ; b) să se determine o careva valoare aproximativă a expresiei date ; c) să se determine o valoare aproximativă care conține 10 cifre semnificative.

Rezolvare. a) Pentru a obține valoarea exactă a expresiei (1) procedăm astfel. Scriem această expresie cu ajutorul paletei în forma (2.1) sau în forma $\frac{3\,\hat{}\,5\,(25+4)-52}{45+36}$ şi tastăm Shift+Enter (sau Enter de lângă cifre). Se afişează :

In[1] := $\dfrac{3^5(25+4)-52}{45+36}$

Out[1]= $\dfrac{6995}{81}$ **.**

b) Pentru a obține o valoare aproximativă scriem un punct după un număr (de exemplu 45.) din expresie. Acest număr va fi considerat aproximativ şi rezultatul se va obține tot aproximativ. Deci scriem expresia dată în forma **:** $\dfrac{3^5(25+4)-52}{45.+36}$ şi tastăm Shift+Enter. Se afişează:

In[2] := $\dfrac{3^5(25+4)-52}{45.+36}$

Out[2]=86.358.

Altă variantă de rezolvare. Acelaşi rezultat se obține dacă scriem $\dfrac{3^5(25+4)-52}{45+36}$ // N şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[3] := $\dfrac{3^5(25+4)-52}{45+36}$ **// N**

Out[3]=86.358.

c) Scriem N[$\dfrac{3^5(25+4)-52}{45+36}$,10] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[4] := $\dfrac{3^5(25+4)-52}{45+36}$

Out[4]=86.35802469

Exemplul 2. Să se determine primul număr prim.

Rezolvare. Scriem: Prime[1] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[4] :=Prime[1]

Out[5]=2

Exemplul 3. Să se extragă rădăcina pătrată din primul număr prim (adică din doi): a) să se afişeze rezultatul cu 20 cifre semnificative; b) să se afişeze o valoare aproximativă arbitrară.

Rezolvare. a) Scriem N[$\sqrt{2}$, 20] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[6] := N[$\sqrt{2}$, 20]

Out[6] =1,4142135623730950488.

b) Scriem $\sqrt{2}$ //N şi tastăm Shift+Enter. Se afişează :

In[7] := $\sqrt{2}$ **//N**

Out[7] =1,41421

Exemplul 4. Se dă expresia 59^{50} . Se cere : a) să se calculeze valoarea exactă a acestei expresii ; b) să se determine o valoare aproximativă cu 20 cifre semnificative; c) să se determine o valoare aproximativă arbitrară.

Rezolvare. a) Scriem 59^{50} şi tastăm Shift+Enter. Se afişează:

In[8] := 59^{50}

Out[8] =34881936094752795051017234658842974844785380621363914440454139574943350485761787882807001.

b) Scriem N[59^{50},20] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează:

In[9] := N[59^{50},20]

Out[9] = 3.488193609×10^{88}.

c) Scriem 59^{50}//N şi tastăm Shift+Enter. Se afişează:

In[10] := 59^{50}//N

Out[10] = 3.48819×10^{88}

Exerciţii pentru lucrul individual

E.2.1. 1) Să se construiască o expresie care conţine cele patru operaţii aritmetice, ridicarea la putere, fracţii şi paranteze. 2) Să se determine valoarea exactă a expresiei construite. 3) Să se determine o careva valoare aproximativă. 4) Să se determine o valoare aproximativă care conţine 20 cifre semnificative.

E.2.2. Să se determine al n-lea număr prim, unde n este egal cu numărul variantei.

E.2.3. Fiind dat al n-lea număr prim (exerciţiul E.2.1), se cere : 1) să se determine o careva valoare aproximativă a rădăcinii pătrate din acest număr; 2) să se determine valoarea aproximativă care conţine 20 cifre semnificative a rădăcinii pătrate din acest număr.

E.2.4. Se dă expresia $(10+n)^{30}$, unde n este numărul variantei. Se cere : 1) să se determine valoarea exactă a acestei expresii ; 2) să se determine o careva valoare aproximativă ; 3) să se determine o valoare aproximativă care conţine 20 cifre semnificative.

1.2.3. Algebra elementară

Dăm câteva exemple de funcţii care pot fi aplicate la rezolvarea exerciţiilor din algebra elementară.

Solve[lhs==rhs,x] – rezolvă în raport cu variabila x ecuaţia lhs = rhs;

NSolve[lhs==rhs,x] – rezolvă numeric ecuaţia lhs = rhs în raport cu variabila x;

Solve[{lhs$_1$==rhs$_1$,lhs$_2$==rhs$_2$,…},{x,y,…}] – rezolvă în raport cu variabilele *x*, *y*,… sistemul* de ecuații lhs$_1$=rhs$_1$, lhs$_2$=rhs$_2$,…;
Reduce[inecuație,*x*] – rezolvă inecuația dată în raport cu variabila *x*;
Factor[expresie] – dezvoltă în produs de factori expresia dată;
Simplify[%] – reduce la o formă mai simplă expresia obținută în exercițiul precedent;
Simplify[expresie] – reduce la o formă mai simplă expresia dată;
Factor[polinom cu coeficienți întregi] – dezvoltă polinoame în produs de factori cu coeficienți întregi;
FactorList[polinom] – determină factorii polinomului şi exponenții puterilor lor.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuația $x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 = 0$.

Rezolvare. Scriem Solve[$x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 == 0, x$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează:

In[1] := Solve[$x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 == 0, x$]

Out[1]={{x→–2–2i},{x→-2+2i},{x→1},{x→4}}.

S-au obținut partu soluții: $x_1 = -2-2i$, $x_2 = -2+2i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$.Δ.

Exemplul 2. Să se resolve inecuația $(x+5)^4 + (x-1)^4 \leq 626$.

Rezolvare. Scriem Reduce[($x + 5)^4 + (x - 1)^4 <= 626, x$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[2]:=Reduce[($x + 5)^4 + (x - 1)^4 <= 626, x$]

Out[2]= $-4 \leq x \leq 0$

Exemplul 3. Să se dezvolte în produs de factori cu coeficienți întregi exprexia $x^{10} - 1$.

Rezolvare. Scriem Factor[$x^{10} - 1$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[3] := Factor[$x^{10} - 1$**]**

Out[3]=$(-1+x)(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

Exemplul 4. Să se reducă la o formă mai simplă expresia obținută în exercițiul precedent.

Rezolvare. Scriem Simplify[%] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[4]:= Simplify[%]

Out[4]=$-1 + x^{10}$.

Exemplul 5. Să se rezolve ecuația $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$: 1) exact; 2) numeric.

Rezolvare. 1) Scriem Solve[$x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[5]:= Solve[$x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x$]

Out[5]={{x→–1},{x→–i},{x→i}}.
S-a obţinut o rădăcină reală şi două rădăcini complexe conjugate.

2) Scriem NSolve$[x^3+x^2+x+1==0,x]$ şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[6]:= NSolve$[x^3+x^2+x+1==0,x]$

Out[6]={{x→–1},{x→–7.1245×10^{-19}+1.i},{x→–7.1245×10^{-19}–1.i}.

Observăm că am obţinut rezultate diferite, dar care diferă foarte puţin unul de altul.

1.2.4. Exerciţii din algebra liniară

Matricele pot fi notate cu A, B, M, a, b, m, … şi ele nu trebuie notate cu C, D. O matrice se introduce în formă de listă, elementele căreia sunt liste care conţin elementele liniilor matricei date. De exemplu matricea pătratică de ordinul trei A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se introduce în document (fişier) astfel. Aflându-ne în fereastra acestui document, scriem A:={{a_{11},a_{12},a_{13}},{a_{21},a_{22},a_{23}},{a_{31},a_{32},a_{33}}} şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[1]:=A:={{a_1,a_{12},a_{13}},{a_{21},a_{22},a_{23}},{a_{31},a_{32},a_{33}}}.

Astfel matricea A a fost introdusă şi cu ea pot fi efectuate operaţiile necesare. Dacă vrem ca matricea A să fie scrisă şi în forna obişnuită, atunci scriem **MatrixForm[A]** şi tastăm Shift+Enter. Se afişează **Out[1]//MatrixForm[A]=**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Printre funcţiile algebrei liniare sunt:

Det[A] – calculează determinantul matricei A şi afişează valoarea lui;

Dot[A,B] – calculează produsul matricelor A şi B şi afişează rezultatul în formă de listă;

Inverse[A] – calculează inversa matricei A şi o afişează în formă de listă;

Transpose[A] – calculează transpusa matricei A şi o afişează în dormă de listă ;

Eigenvalues[A] – calculează valorile proprii ale matricei A şi le afişează în formă de listă;
Eigenvectors[A] – calculează vectorii proprii ai matricei A şi îi afişează în formă de listă, elementele căreia sunt liste alcătuite din coordonatele vectorilor proprii;
Eigensystem[A] – calculează valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei A şi îi afişează în formă de listă primul element al căreia este lista valorilor proprii, iar celelalte elemente sunt liste alcătuite din coordonatele vectorilor proprii.

Dacă vrem ca matricele să fie afişate în forma obişnuită, atunci în instrucțiuni în afară de funcția respectivă se introduce şi **MatrixForm**. Exemplificăm acest caz.
MatrixForm[A.B] – afişează produsul AB al matricelor A şi B în formă de matrice;
MatrixForm[A+B] – afişează în formă de matrice suma A+B a matricelor A şi B;
MatrixForm[α*A] – afişează în formă de matrice produsul numărului α cu matricea A;
Transpoze[A]//MatrixForm – afişează în formă de matrice transpusa matricei A;
Inverse[A]//MatrixForm – afişează în formă de matrice inversa matricei A.
Exemplul1. Fie matricele,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}$$

şi numărul α= 3. Să se determine: 1) A+B; 2) 3A; 3) AB; 4) detA; 5) A^{-1}; 6) A^T.

Rezolvare. Introducem matricele A şi B. Pentru aceasta scriem A:={{1,2 ,4 },{5,1 ,2 },{3,-1 ,1 }}, tastăm Shift+Enter şi se afişează
In[1] :=A:={{1,2 ,4 },{5,1 ,2 },{3,-1 ,1 }}.
Asemănător, scriem B:={{4,–1 ,2 },{2,5 ,–3 },{5,6 ,–2 }}, tastăm Shift+Enter şi se afişează
In[2] :=B:={{4,–1 ,2 },{2,5 ,–3 },{5,6 ,–2 }}.

Astfel, matricele A şi B au fost introduse în document.

1) Pentru calculul sumei A+B scriem MatrixForm[A+B], tastăm Shift+Enter şi se afişează

In[3] :=MatrixForm[A+B],

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & 6 & -1 \\ 8 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Pentru a calcula produsul 3A scriem MatrixForm[3*A], tastăm Shift+Enter şi se afişează

In[4] :=MatrixForm[3*A],

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 15 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Pentru a calcula produsul AB scriem MatrixForm[A.B], tastăm Shift+Enter şi se afişează

In[5] :=MatrixForm[A.B],

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 28 & 33 & -12 \\ 32 & 12 & 3 \\ 15 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

4) Pentru a calcula determinantul matricei A scriem Det[A], tastăm Shift+Enter şi se afişează

In[6] :=Det[A]

Out[6]=–27.

5) Pentru a determina inversa matricei A scriem Inverse[A]//MatrixForm, tastăm Shift+Enter şi se afişează

In[7] :=Inverse[A]//MatrixForm

Out[7]=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1/9 & 2/9 & 0 \\ -1/27 & 11/27 & -2/3 \\ 8/27 & -7/27 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

6) Pentru a determina transpusa matricei A scriem Transpoze[A]//MatrixForm, tastăm Shift+Enter şi se afişează

In[8] :=Transpoze[A]//MatrixForm

Out[8]=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observație. Se ştie că înmulțirea numerelor se notează cu semnul *. Dacă încercăm să notăm inmulțirea matricelor cu acelaşi semn, atunci nu obținem produsul matricelor, dar obținem o matrice elementele căreia sunt produsele elementelor respective ale matricelor date. Deci să fim atenți la notații !

Într-adevăr, dacă scriem MatrixForm[A*B] şi tastăm Shift+Enter, atunci se afişează

In[9] :=MatrixForm[A*B]

Out[9]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 10 & 5 & -6 \\ 15 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2. Fiind dată matricea pătratică de ordinul trei $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, să se determine: 1) valorile proprii, 2) vectorii proprii, 3) valorile proprii şi vectorii proprii.

Rezolvare. Introducem matricea M. Pentru aceasta scriem M:={{–1,3,–1},{–3,5,–1},{–3,3,1}} şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[10]:=M:={{-1,3,-1},{-3,5,-1},{-3,3,1}}.

Deci matricea M s-a introdus în document.

1) Pentru a determina valorile proprii scriem Eigenvalues[M] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[10]:=Eigenvalues[M]

Out[10]={2,2,1}.

2) Pentru a obţine vectorii proprii scriem Eigenvectors[M] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[11]:=Eigenvectors[M]

Out[11]={{-1,0,3},{1,1,0},{1,1,1}}.

3) Pentru a determina şi valorile proprii, şi vectorii proprii scriem Eigensystem[M] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[12]:=Eigensystem[M]

Out[11]={{2,2,1},{-1,0,3},{1,1,0},{1,1,1}}.

Exemplul 3. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = -1 \\ y_1 - y_2 \qquad\qquad\; = -1 \\ \qquad\qquad y_3 - y_4 = 2 \end{cases}.$$

Rezolvare. Scriem Solve[{y_1+y_2+y_3+y_4==7, y_1+y_2–y_3–y_4==–1, y_1–y_2==–1, y_3–y_4==2}, {y_1,y_2,y_3,y_4}] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[13]:= Solve[{y_1+y_2+y_3+y_4==7, y_1+y_2–y_3–y_4==–1, y_1–y_2==–1, y_3–y_4==2}, {y_1,y_2,y_3,y_4}]

Out[13]={{y_1→1,y_2→2,y_3→3,y_4→1}}.

Exemplul 4. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem Solve[{2x_1+3x_2–x_3==8, 5x_1–2x_2+2x_3==6, x_1+4x_2–3x_3==9},{x_1,x_2,x_3}] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[13]:=Solve[{2x_1+3x_2–x_3==8,5x_1–2x_2+2x_3==6,x_1+4x_2–3x_3==9},{x_1,x_2,x_3}]

Out[13]={{x_1→2,x_2→1,x_3→–1}}

S-a obţinut soluţia x_1=2, x_2=1,x_3= –1.

1.2.5. Calculul diferențial şi calculul integral al funcțiilor reale de o variabilă reală

În sistemul Mathematica funcțiile se notează asemănător cu notațiile obişnuite, prima literă fiind majusculă. Argumentele funcțiilor sunt delimitate cu paranteze pătratice [şi]. Exemple:

Sin[x] este notația expresiei sin$x$; **Cos[x]** – cos$x$; **Tan[x]** – tg$x$;
ArcSin[x] – arcsin$x$; **Log[x]** – ln$x$; **Log[b,x]** – $\log_b x$; **Exp[x]** – e^x;
Sqrt[x] – rădăcina pătrată din x;

a) Calculul limitelor. Printre funcțiile care pot fi aplicate la rezolvarea exercițiilor din acest punct sunt următoarele.

Limit[f,x–>a] - calculează limita funcției f(x) în punctul a;

Limit[f,x–>Infinity] - calculează limita funcției f(x) când x tinde la infinit;

Limit[f,x–>a,Direction→ + a] - calculează limita la dreapta a funcției f(x) în punctul a;

Limit[f,x–>a,Direction→ - a] - calculează limita la stânga a funcției f(x) în punctul a.

Exemplul 1. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x - e^{3x}}{\ln(1+4x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{(2x+1)/(x-1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$.

Rezolvare. a) Scriem Limit[$\dfrac{Cos[2*x]-E^{3*x}}{Log[1+4*x]}$,x→0] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[1]:=Limit[$\dfrac{Cos[2*x]-E^{3*x}}{Log[1+4*x]}$ **,x–>0]**

Out[1]=$-\dfrac{3}{4}$**.**

b) Scriem Limit[,x→Infinity] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[2]:=Limit[$\left(\dfrac{x^2+2*x-1}{2*x^2-3*x-2}\right)^{(2*x+1)/(x-1)}$ **,x→Infinity]**

Out[2]=$\dfrac{1}{4}$.

c) Scriem Limit[$\frac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→1,Direction→–1] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[3]:=Limit[$\frac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→1,Direction→–1]

Out[3]=0.

d) Scriem Limit[$\frac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→1,Direction→+1] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[4]:=Limit[$\frac{1}{1+3^{1/(x-1)}}$,x→+1,Direction→+1]

Out[4]=1.

b) Construcția liniilor şi a graficelor funcțiilor reale de o variabilă reală. Se aplică funcțiile ce urmează.

Plot[f,{x,a,b}] – construieşte graficul funcției f(x), a ≤ x ≤ b;

Plot[{f_1,f_2,...},{x,a,b}] – construieşte pe acelaşi desen graficele funcțiilor $f_1(x)$, $f_1(x)$,... a ≤ x ≤ b;

ListPlot[{x_1,y_1},{x_2,y_2},…] – construieşte punctele cu coordonatele carteziene (x_1,y_1),(x_2,y_2),…;

ParametricPlot[{f_x,f_y},{t,a,b}] – construieşte linia dată prin ecuațiile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$, a ≤ x ≤ b;

ParametricPlot[{f_x,f_y},{g_x,g_y},{t,a,b}] – construieşte liniile date prin ecuațiile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_z(t)$, a ≤ x ≤ b, şi $x=g_x(t)$, $y=g_y(t)$, a≤x≤b;

ParametricPlot3D[{f_x,f_y,f_z},{t,a,b}] – construieşte linia din spațiul $\mathbf{R}^3$ dată prin ecuațiile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$, $z=f_z(t)$, a ≤ x ≤ b.

Exemplul 2. Să se construiască liniile date prin ecuațiile:

a) $f(x)=\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x+3}$, $x\in[-1, 2]$; b) $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t; \end{cases}$ $t\in[0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) Scriem

Plot[$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x+3}$, {$x$,–1, 2}]

şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[5]:=Plot[$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x+3}$, {$x$,–1, 2}]

Out[5]=desenul

b) Scriem Plot[$\{2(\mathrm{Cos}[t])^3$, $2(\mathrm{Sin}[t])^3$,{t,0,2π] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[6]:=Plot[$\{2(\mathrm{Cos}[t])^3$, $2(\mathrm{Sin}[t])^3$,{t,0,2π }**]**

Out[6]=desenul.

c) Calculul derivatei şi al diferenţialei

Se folosesc funcţiile:

D[f,x] – calculează derivata funcţiei *f* în raport cu variabila *x* ;

D[f,{x,n}] – calculează derivata de ordinul *n* a funcţiei *f* în raport cu variabila *x* ;

Dt[f] – calculează diferenţiala funcţiei *f*;

Exemplul 3. Se dă funcţia $f(x) = arctg(\ln x) + \ln(arctgx)$. Să se calculeze: a) derivatele df/dx; b) derivata de ordinul doi d^2f/dx^2; c) diferenţiala df.

Rezolvare. a) Scriem D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],x] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[7]:=D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],x]

Out[7]= $\dfrac{1}{(1+x^2)\,ArcTan[x]} + \dfrac{1}{x(1+Log[x]^2)}$.

În această expresie $Log[x]^2$ înseamnă $Log^2 x$.

b) Scriem D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],{x,2}] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[8]:=D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],{x,2}]

Out[8]= $-\dfrac{1}{(1+x^2)^2\,ArcTan[x]^2} - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2\,ArcTan[x]} -$

$$\dfrac{2\,Log[x]}{x^2(1+Log[x]^2)^2} - \dfrac{1}{x^2(1+Log[x]^2)}.$$

c) Scriem Dt[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]]] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[9]:=Dt[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]]]

Out[9]= $\dfrac{Dt[x]}{(1+x^2)\,ArcTan[x]} + \dfrac{Dt[x]}{x(1+Log[x]^2)}$.

În expresia precedentă *Dt*[x] înseamnă dx.

d) Calculul integralelor. Pot fi aplicate funcţiile ce urmează.

Integrate[f,x]–calculează primitiva (integrala nedefinită) a funcţiei *f(x)* ;

Integrate[f,{x,a,b}] – calculează integrala definită a funcţiei f(x) pe intervalul [a,b], a < b;

Integrate[f,{x,a,Infinity}] - calculează integrala improprie a funcției f(x) pe intervalul [a,∞);
NIntegrate[f,{x,a,b}] - calculează numeric integrala definită a funcției f(x) pe intervalul [a,b].

Exemplul 4. Să se calculeze integralele nedefinite:
a) $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1+x^2}}$, b) $\int \frac{x^5+4x^2+5x^3-x^2-2x+2}{x^3-1}dx$.

Rezolvare. a) Scriem Integrate[$\frac{1}{x^6\sqrt{1+x^2}}, x$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[10]:=Integrate[$\frac{1}{x^6\sqrt{1+x^2}}, x$**]**

Out[10]=$\frac{\sqrt{1+x^2}(3-4x^2+6x^4)}{15x^5}$**.**

b) Scriem Integrate[$\frac{x^5+4x^4+5x^3-x^2-2x+2}{x^3-1}, x$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[11]:=Integrate[$\frac{x^5+4x^4+5x^3-x^2-2x+2}{x^3-1}, x$**]**

Out[11]=

$$5x+4x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{5}{\sqrt{3}}ArcTan\left[\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right]+3Log[-1+x]-\frac{3}{2}Log[1+x+x^2].$$

Exemplul 5. Să se calculeze valoarea exactă a integralei definite

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx .$$

Rezolvare. Scriem Integrate[$\sqrt{1-x^2}, \{x,0,1\}$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[12]:=Integrate[$\sqrt{1-x^2}, \{x,0,1\}$ **]**

Out[12]=$\frac{\pi}{4}$.

Exemplul 6. Să se calculeze o valoare aproximativă a integralei definite $\int_0^1\sqrt{1+x^3}dx$.

Rezolvare. Scriem NIntegrate[$\sqrt{1+x^3}, \{x,0,1\}$] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[13]:=NIntegrate[$\sqrt{1+x^3}, \{x,0,1\}$ **]**

Out[13]=1.11145.Δ

Exemplul 7. Să se calculeze integralele improprii

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$; b) $\int_1^{\infty} \ln \frac{e^{1/x}+2}{3}dx$.

Rezolvare. a) Scriem Integrate[$\frac{x^2}{1+x^4}, \{x, 0, \mathit{Infinity}\}$]] şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

In[14]:=Integrate[$\frac{x^2}{1+x^4}, \{x, 0, \mathit{Infinity}\}$] **]**

Out[14]=$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

b) Scriem $\int_1^{\infty} \ln[\frac{e^{1/x}+2}{3}]dx$ şi tastăm Shift+Enter. Se afişează

Integral of $Log[\frac{1}{3}(2+e^{1/x})]$ does not converge on $\{1,\infty\}$.

Out[15]=$\int_1^{\infty} Log[\frac{1}{3}(2+e^{1/x})]dx$.

Aceasta înseamnă că integrala este divergentă.

1.3. Elemente de Analiză Combinatorie şi Aplicaţiile acestora

Analiza Combinatorie este o disciplină matematică care *studiază metodele de numărare (sau de calcul) ale tuturor combinărilor ce pot pot fi alcătuite din elementele unei mulţimi finite în baza unor reguli prestabilite.* Or, această disciplină are de a face numai cu ***mulţimi finite.***

Analiza combinatorie se bazează esenţial pe două principii: ***Principiul adunării şi Principiul înmulţirii***. Dacă A şi B sunt două mulţimi finite, atunci distingem două situaţii, după cum cele două mulţimi pot fi disjuncte sau nu. Evident are loc :

Principiul adunării (caz disjunct)

Dacă A şi B sunt mulţimi finite şi disjuncte, adică $A \cap B = \emptyset$, card(A) = n şi card(B) = m , atunci

$$card(A \cup B) = n + m \qquad (1.2)$$

Corolar. *Daca $A_1, A_2, \ldots A_k$ sunt mulţimi finite disjuncte două* *câte două atunci*

$$.card\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} cardA_i$$

Principiul adunării (caz general)

Dacă A şi B sunt mulțimi finite A , B , card (A) = n, card (B) = m şi card (A ∩ B) = k, atunci

$$card\ (A \cup B) = n + m - k\ . \qquad (1.3)$$

Exercițiul 1. Folosind inducția matematică, deduceți Principiul adunării pentu un număr arbitrar *k* de mulțimi finite $A_1, A_2, ..., A_k$.

Exemplul 1. Considerăm un grup de studenți despre care ştim că 20 de studenți cunosc limba engleză, 15 limba franceză, 10 limba germană, 5 limbile engleza si franceza, 5 limbile franceza si germana, 4 limbile engleza si germana şi 1 student limbile engleza, franceza şi germana. Câți studenți sunt în grup?

Solutie. Notând prin E, F şi G mulțimile de studenți care posedă, respectiv, limba engleză, franceză, germană şi tinînd cont de datele problemei, deducem:

Card E = 20, card F = 15, card G = 10, card (E ∩ F) = 5,
card(E ∩ G) =4, card (F ∩ G) = 5, card (E ∩ F ∩ G) = 1
şi atunci
card (E U F U G) = card (E) + card (F) + card (G) – card(E ∩ F) – card(E ∩ G) - card (F ∩ G) + card (E ∩ F ∩ G) =32

Principiul înmultirii în limbajul produsului cartezian

Dacă A si B sunt două mulțimi finite astfel încât card (A) = n si card (B) = m, atunci

$$card\ (A \times B) = n \cdot m\ . \qquad (1.4)$$

Remarcă. *Pentru orice număr n de mulțimi finite are loc formula:*

$$card(A_1 \times A_2 \times ... A_n) = \prod_{i=1}^{n} card(A_i). \qquad (1.5)$$

Principiul înmulțirii în limbajul produsului cartezian poate fi reformulat în limbajul acțiunilor.

Principiul înmulțirii în limbajul actiunilor

Dacă o acțiune poate fi realizată în k etape succesive astfel încât *etapa i poate fi realizată în n_i modalităţi,* $i=\overline{1,k}$, *atunci această acţiune poate fi realizată în* $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ *modalităţi.*

Exemplul 2. Presupunem că un safeu poate fi deschis, cunoscând un cod de forma $i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5\ i_6$, unde $i_k = 0,1,\ldots,9,\ k = 1,2,\ldots,6$. Cu ce este egal numărul total de coduri diferite ce pot fi alcătuite în acest mod?

Soluţie. Mulţimea Ω a tuturor codurilor posibile coincide cu produsul cartezian al mulţimii {0, 1, 2,…, 9} de 6 ori cu ea însăşi, adică $\Omega=\{ (i_1 ,i_2 ,i_3 ,i_4 ,i_5 ,i_6) : i_k=0,1,\ldots,9,\ k=1,2,\ldots,6\}$. Aceasta are, conform Principiului înmulţirii în limbajul produsului cartezian, 10^6 elemente. Cu alte cuvinte, numărul total de coduri diferite ce pot fi alcătuite în acest mod este egal cu 10^6.

Exemplul 3. Dacă avem informaţia suplimentară, că acest cod din exemplul anterior este format din cifre diferite, atunci numărul total al codurilor diferite descreşte. Într-adevăr, a forma un cod din 6 cifre diferite este echivalent cu a efectua o acţiune în 6 etape succesive, astfel încât prima etapă poate fi realizată în 10 modalităti, cea de-a doua în 9 modalităţi etc., ultima (a sasea) în 10 - (6- 1) = 5 modalităţi. Conform Principiului înmultirii în limbajul acţiunilor, numărul tuturor evenimentelor elementare este egal cu $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$. Observăm că, spre deosebire de exemplul anterior, aplicarea principiului inmulţirii în limbajul produsului cartezian devine defectuoasă.

Definiţia 1. Fie A o mulţime formată din n elemente diferite, $A =\{a_1, a_2,\ldots,a_n\}$, atunci vom numi aranjament din n elemente luate câte k orice mulţime *ordonată* de forma

$$\left(a_{i_1}, a_{i_2},\ldots, a_{i_k}\right): i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k, a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$$

Evident noţiunea are sens pentru $k =1,2,\ldots,n$. Mulţimea tuturor aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează cu A_n^k , adică

$$A_n^k = \left\{\left(a_{i1}, a_{i2},\ldots, a_{ik}\right) \mid i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k, a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,k}\right\}.$$

Cardinalul acestei mulţimi se noteaza cu A_n^k şi este numărul tuturor aranjamentelor din n elemente luate câte k.

Conform principiului înmulţirii în limbajul acţiunilor, a construi *un aranjament din n elemente luate câte k* este echivalent cu a realiza o acţiune în k etape succesive, astfel încât prima etapă poate fi realizată în n modalităţi, cea de- a doua în $n-1$ modalităţi etc., ultima (etapa nr.

k) în n-(k-1) = n - k+1 modalități. Or, numărul tuturor aranjamentelor din n elemente luate câte k este egal cu

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = n!/(n-k)! \qquad (1.6)$$

Prin definiție, atunci când $k=n$, aranjamentul se numeşte *permutare de n elemente*. Deci, mulțimea tuturor permutărilor de n elemente notată prin P_n coincide cu A_n^n, ceea ce înseamnă că numărul tuturor permutărilor de elemente P_n este egal cu A_n^n, adică

$$P_n = n!. \qquad (1.7)$$

Definiția 2. Orice submulțime de forma

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} : i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k, a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$$

se numeşte *combinare din n elemente luate câte k*. Evident noțiunea are sens pentru $k = 1, 2, \ldots n$. Mulțimea tuturor combinărilor de n elemente luate câte k elemente este, aşadar, mulțimea $\{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} : i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k, a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}$.

Cardinalul acestei mulțimi îl vom nota cu C_n^k .

Observăm că dintr-o combinare din n elemente luate câte k putem forma $k!$ aranjamente din n elemente luate câte k. Or, a forma un aranjament din n elemente luate câte k este echivalent cu a realiza o acțiune în două etape succesive:

1. alegem o combinare din n elemente luate câte k, etapă pentru care avem C_n^k modalități de a o efectua;

2. din această combinare, formăm un aranjament din n elemente luate câte k, etapa care se poate realiza în A_n^k modalități.

Rezultă că $A_n^k = k!\cdot C_n^k$, adică

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.8}$$

Exercițiul 2. Demonstrați că dacă A este o mulțime formată din n elemente diferite, atunci $card\{B : B \subseteq A\} = 2^n$, unde B – booleanul mulțimii A.

Exemplul 4. Considerăm că avem o mulțime de n elemente astfel încât n_1 elemente sunt de tipul *1*, n_2 elemente sunt de tipul *2*, …, n_k elemente sunt de tipul k, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Alegem la întâmplare, unul câte unul, toate elementele mulțimii şi le aranjăm în ordinea extragerii lor. Să se calculeze cardinalul numărului total de rezultate posibile în acest experiment.

Solutie. Notăm prin Ω mulțimea tuturor rezultatelor posibile în acest experiment. Pentru a obține un rezultat posibil, corespunzător acestui experiment, este suficient să realizăm o acțiune în k etape suc-cesive.

Etapa 1: din n locuri disponibile, pentru a aranja elementele extra-se, alegem n_1 locuri pe care vom plasa elementele de tipul *1*. Aceasta actiune o putem realiza în $C_n^{n_1}$ modalitati;

Etapa 2: din cele n-n_1 locuri, disponibile după etapa *1* , alegem n_2 locuri pe care vom plasa elementele de tipul 2. Această acțiune o putem realiza în $C_{n-n_1}^{n_2}$ modalități, etc.,

Etapa k: din cele $n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1} = n_k$ locuri, disponibile după etapa k, alegem n_k locuri pe care vom plasa elementele de tipul k. Această acțiune o putem realiza în $C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k} = C_{n_k}^{n_k}$ modalități.

Conform principiului înmulțirii, avem :

$$card(\Omega) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot ... \cdot C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

Formula obținută este, de fapt, formula de calcul pentru $P(n_1, n_2, ..., n_k)$, numărul permutărilor a n elemente, din care n_1 elemente sunt de tipul *1*, n_2 elemente sunt de tipul *2*, … , n_k elemente sunt de tipul k, $n_1+n_2+...+n_k = n$:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}. \tag{1.9}$$

Ultima mai poartă denumirea de *formula permutărilor cu repetare*.

Exemplul 5. Presupunem ca avem la dispoziție 10 cartonaşe marcate cu litere astfel: *M, M, A, A, A, T, T, I, E, C*. Un copil se joacă, extrăgând la întâmplare câte un cartonaş şi aranjându-l în ordinea extragerii. Câte cuvinte diferite sunt posibile în acest caz?
Întrucât considerăm cartonaşele marcate la fel ca fiind de acelaşi tip, rezultă că avem *2* cartonaşe de tip *M*, *3* cartonaşe de tip *A*, 2 cartonaşe de tip *T*, 1 cartonaş de tip *I*, 1 cartonaş de tip *E* şi *1* cartonaş de tip *C*.
Notăm prin Ω mulțimea tuturor rezultatelor posibile în acest experi-ment. Atunci, folosind formula dedusă mai sus, tinând cont că rezultatul aranjării cartonaşelor în ordinea extragerii lor defineşte un cuvânt, obținem că numărul cuvintelor diferite ce pot fi obținute astfel, se calculează după formula:

$$card(\Omega) = \frac{10!}{2!3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200.$$

Exemplul 6. Presupunem că dispunem de *n* cutii şi *r* bile identice. Plasăm bilele, una câte una, la întâmplare, în careva din cutii. Sa se calculeze cardinalul mulțimii tuturor rezultatelor posibile în acest experiment.

Soluție. În cele ce urmează vom reprezenta *n* cutii prin intermediul a *n + 1* bare verticale, iar *r* bile prin intermediul a *r* asteriscuri. De exemplu, situația când *5* bile identice, fiind plasate în *3* cutii astfel încât în prima cutie nimeresc *0* bile, în cutia a doua -*2* bile şi în cutia a treia- *3* bile poate fi reprezentată astfel: ||**|***|, iar situația când toate bilele nimeresc în prima cutie poate fi reprezentată astfel:
|*****|||. Or, pentru o astfel de reprezentare schematică avem nevoie de *n + 1* locuri pentru bare (pereții cutiilor) şi *r* locuri pentru asteriscuri (bile). Din exemplele aduse vedem că orice repartizare concretă a *r* bile identice în *n* cutii este univoc determinată de poziția a *n - 1* bare (pereți) interioare şi a *r* asteriscuri (bile) pe cele *r + n - 1* locuri interioare, cele două bare (pereți) exterioare ramânând de fiecare dată fixe. Drept consecință, alegerea a *n – 1* locuri pentru bare (sau *r* locuri pentru asteriscuri) din totalul de *n + r – 1* locuri, poate fi făcută în $C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^{r}$ modalități, unde C_{n+r-1}^{n-1} este cunoscut ca *numărul combinărilor din n elemente luate câte r cu repetare.*

2. CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

2.1. Observații privind calculul probabilităților şi definiția axiomatică a probabilității

Dacă rezolvarea unei probleme de calcul al probabilității se reduce la aplicația unei formule de calcul, atunci rămâne să introducem în această formulă datele numerice ale problemei şi parametrii necesari. Astfel se obține o expresie numerică a cărei valoare numerică trebuie calculată. Din cele expuse anterior rezultă că Sistemul de programe Mathematica permite: calculul valorii exacte, calculul unei valori aproximative cu şapte cifre semnificative şi calculul unei valori aproximative cu un număr dorit de cifre semnificative.

Observație. Cunoaştem deja că în Sistemul Mathematica, după scrierea instrucțiunii, se tasteaza Shift+Enter pentru ca instrucțiunea să fie executată. De aceea în textul rezolvărilor problemelor ce urmează se conține numai instrucțiunea respectivă şi rezultatul executării ei: Input, Output precum şi unele comentarii (dacă ele sunt necesare).

Unele calcule din exercițiile ce urmează pot fi efectuate cu ajutorul unui microcalculator, sau chiar „în minte”. Prin intermediul unor atare exerciții se ilustrează *nu atât necesitatea* utilizării Sistemului Mathematica, cât *posibilitatea* utilizării acestuia.

Variante de exerciții pentru lucrul individual pot fi găsite în lista de exerciții propuse pentru rezolvare de la sfârşitul paragrafului.

La rezolvarea exercițiilor ce urmează vor fi folosite unele funcții din cele enunțate anterior, dar şi unele din funcțiile:

Collect[expr,x] – reduce termenii asemenea din expresia **expr** şi îi arangează după puterile lui x;

Sum[f[i],{i,i_{min},i_{max}}] – calculează suma valorilor funcției f pentru i de la i_{min} până la i_{max} cu pasul +1;

NSum[f[i],{i,i_{min},i_{max}}] – calculează o valoare a sumei valorilor funcției f pentru i de la i_{min} până la i_{max} cu pasul +1;

Product[f[i],{i,i_{min},i_{mox}}] - calculează produsul valorilor funcției f pentru i de la i_{min} până la i_{max} cu pasul +1;

NProduct[f[i],{i,i_{min},i_{mox}}] – calculează o valoare a produsului valorilor funcției f pentru i de la i_{min} până la i_{max} cu pasul +1.

Drept punct de plecare în calculul probabilităților serveşte definiția axiomatică a probabilității, care întregeşte modelarea matematică a experimentelor aleatoare ce posedă Proprietatea Regularității statistice. Această modelare presupune identificarea următoarelor elemente (obiecte) matematice cu ajutorul cărora descriem:

a) mulțimea de rezultate posibile într-un experiment aleator $\mathscr{E}$;

b) mulțimea (familia) $\mathscr{F}$ a tuturor evenimentelor aleatoare asociate experimentului $\mathscr{E}$;

c) probabilitatea (regula) ***P***, conform căreia fiecărui eveniment aleator *A*, asociat experimentului $\mathscr{E}$ i se pune în corespondența probabilitatea acestuia ***P****(A)*.

Răspunsul la p. ***a)*** ni-l dă

Definiția 1. Vom numi ***spațiu de evenimente elementare*** orice mulțime nevidă Ω, elementele careia corespund rezultatelor posibile într-un experiment aleator $\mathscr{E}$. Elementele ω din Ω se numesc ***evenimente elementare***.

Dăm câteva exemple de spații de evenimente elementare.

1. Considerăm, în calitate de experiment aleator $\mathscr{E}$, aruncarea unei monede o singură dată .Atunci spațiul corespunzător de evenimente elementare $\Omega=\{S, B\}=\{0, 1\}=\{\omega_1, \omega_2\}$, unde prin *S, 0* sau ω_1 am notat evenimentul elementar ce constă în apariția Stemei, iar prin *B, 1* sau ω_2 am notat apariția Banului.

2. Considerăm aruncarea unei monede de două ori succesiv. Atunci $\Omega=\{SS,SB,BS, BB\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, păstrând acelaşi tip de notare.

3. Experimentului aleator $\mathscr{E}$, ce constă în aruncarea unui zar o singură dată, îi corespunde spațiul de evenimente elementare $\Omega=\{1, 2,...,6\}=\{\omega_1, \omega_2,..., \omega_6\}$, unde *i* sau ω_i reprezintă numărul de puncte apărute, $i= 1, 2,...,6$.

4. Iar acum considerăm, în calitate de experiment aleator $\mathscr{E}$, aruncarea unei monede până la prima apariție a Stemei. Atunci $\Omega=\{S,BS, BBS,...\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_n , ...\}$, unde ω_n , de exemplu, corespunde rezultatului posibil (elementar) ce semnifică faptul că experimentul s-a terminat la aruncarea cu numărul *n* odată cu aparitia Stemei precedată de aparitia Banului de *n-1* ori.

5. Considerăm experimentul aleator ce constă în măsurarea staturii unui student luat la întâmplare de la Universitatea Tehnică a Moldovei. Notăm prin ω înălțimea acestuia. Atunci $\Omega=\{ \omega: \omega>0\}$.

Observație. Vom spune că exemplele de tipul 1-5 se referă la ***cazul discret*** deoarece spațiul de evenimente elementare Ω corespunzător reprezinta o *multime finită* (vezi exemplele 1-3) sau o *mulțime infinită, cel mult, numărabilă* (în exemplul 4), iar exemplele de tipul 5 se referă la *cazul continuu* deoarece spațiul de evenimente elementare Ω corespunzător reprezintă o *mulțime infinită nenumărabilă*.

Răspunsul la p. *b)* îl aflăm din

Definiția 2. Fie Ω un spațiu de evenimente elementare, atunci vom numi ***eveniment aleator*** orice element A din familia $\mathfrak{F}$ **={**A**:** A este submulțime a lui Ω**}** ce verifică următoarele 2 axiome:

1^0. Dacă A este eveniment aleator*, adică A este element al lui $\mathfrak{F}$* atunci şi complementara acestuia, $\bar{A}$={ *ω din* Ω : *ω nu aparține lui A*} este eveniment aleator;

2^0. Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sunt evenimente aleatoare, atunci şi reuniunea (suma) acestor submulțimi este eveniment aleator.

Familia $\mathfrak{F}$ sau perechea (Ω, $\mathfrak{F}$) se mai numeşte *câmp de evenimente aleatoare*.

Observație. *Dacă Ω este o mulțime de tip discret*, atunci axiomele 1^{0}- 2^0 ale câmpului de evenimente aleatoare se verifică automat, cu alte cuvinte , *în acest caz,* din oficiu, *orice submulțime A din spațiul de evenimente elementare Ω este eveniment aleator.* Dacă evenimentul elementar *ω din* Ω aparține şi evenimentului A, atunci spunem ca *ω favorizează evenimentul* A.

Mai mult, deoarece evenimentele aleatoare reprezintă submulțimi ale lui Ω, rezultă că asupra lor pot fi aplicate toate operațiile asupra mulțimilor. Astfel, reuniunea a două evenimente aleatoare se numeşte ***sumă***, intersecția lor se numeste ***produs,*** iar complementara $\bar{A}$={ *ω din* Ω : *ω nu apartine lui A*} a unui eveniment aleator *A* se numeşte eveniment *non-A* sau *opusul* sau *negarea evenimentului A*. Evenimentul Ω se numeşte eveniment ***sigur***, iar evenimentul ce corespunde mulțimii vide Ø se numeşte *eveniment imposibil.* Dacă produsul (intersecția) a două evenimente *A* şi *B* este un eveniment imposibil*,* atunci se spune că *evenimentele A şi B sunt incompatibile (disjuncte).* Dacă evenimentul *A* se conține (ca mulțime) în *B,* atunci spunem ca *evenimentul A implică evenimentul B.* Dacă, concomitent cu aceasta, are loc şi relația inversă, atunci *A*=*B* şi spunem că evenimentele *A şi B* sunt echivalente.

Evident, operațiile asupra evenimentelor aleatoare posedă aceleaşi proprietăti ca şi operțiile asupra mulțimilor. În particular, sunt valabile

Formulele de dualitate ale lui de Morgan:

1) *Complementara* ***sumei*** *a două evenimente A şi B coincide cu* ***produsul*** *complementarelor acestor evenimente;*
2) *Complementara* ***produsului*** *a două evenimente A şi B coincide cu* ***suma*** *complementarelor acestor evenimente.*

Putem, în sfârşit, răspunde la p. *c)* prin

Definitia3. (***Definiția axiomatică a probabilității***). Vom numi *probabilitate definită pe cîmpul de eveneminte aleatoare* (Ω, $\mathfrak{F}$) orice aplicație $\boldsymbol{P}$: $\mathfrak{F}\rightarrow\mathbf{R}$ care verifică următoarele axiome:

A1. $\boldsymbol{P}(A)\geq 0$ pentru orice eveniment A din $\mathfrak{F}$;

A2. $\boldsymbol{P}(\Omega)=1$;

A3. $\boldsymbol{P}(A_1+A_2+...+A_n+...)=\boldsymbol{P}(A_1)+\boldsymbol{P}(A_2)+...+\boldsymbol{P}(A_n)+...$ pentru orice şir de evenimente $A_1, A_2,..., A_n,...$din $\mathfrak{F}$, disjuncte două cate două, aici „+" semnificând operatia de reuniune a multimilor, atunci când acestea sunt disjuncte, două cate două.

Pentru orice eveniment aleator A, numărul $\boldsymbol{P}(A)$ se numeşte *probabilitatea evenimentului A* . Tripletul (Ω,$\mathfrak{F}$, $\boldsymbol{P}$) se numeşte *câmp de probabilitate.*

Din aceasta definiție deducem următoarea

Teoremă ***(Proprietățile probabilității)*** . *Orice probabilitate* **P** *definită pe câmpul de eveneminte aleatoare* (Ω, $\mathfrak{F}$) *posedă următoarele proprietăți:*

a) $0\leq \boldsymbol{P}(A)\leq 1$ *pentru orice eveniment A din* $\mathfrak{F}$;

b) $\boldsymbol{P}(\bar{A})=1-\boldsymbol{P}(A)$ ($\boldsymbol{P}(A)=1-\boldsymbol{P}(\bar{A})$) (2.1)
pentru orice eveniment A din $\mathfrak{F}$;

c) *Probabilitatea evenimentului imposibil este egala cu zero;*

d) ***(Formula adunării probabilităților).*** *Dacă* A_1 , A_2 ,..., A_n *sunt evenimente aleatoare legate de acest câmp* $\mathfrak{F}$, *atunci*

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i)=\sum P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j)+ \qquad (2.2)$$

$$+\sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)+...+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

e) Dacă A şi B sunt evenimentele din $\mathscr{F}$ *şi A implică B*, adică $A \subseteq B$, *atunci* ***P****(A)≤* ***P****(B).*

2.2. Calculul probabilităților clasice

Pentru început vom formula definiția clasică a probabilității în varianta ei modernă.

Definiția clasică a probabilității. Vom spune că ***avem de a face cu o probabilitate clasică P*** dacă:

a) Spațiul de evenimente elementare Ω conține un număr finit de evenimente elementare;

b) Familia de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ este reprezentată de toate submulțimile posibile ale lui Ω;

c) P este o aplicatie definită pe $\mathscr{F}$ cu valori în mulțimea numerelor reale calculate conform formulei

$$P(A) = \frac{card\ \ A}{card\ \ \Omega}, \tag{2.3}$$

unde *card A* înseamnă numărul de elemente ale submulțimii respective *A* din Ω. ***P****(A)*, reprezentând un numar, se numeşte ***probabilitatea evenimentului*** *A,* iar tripletul (Ω,$\mathscr{F}$, ***P***) - ***câmp de probabilitate clasică***.

Se observă că probabilitatea clasică este un caz particular al probabilității definite axiomatic. În plus, observăm că din această definiție rezultă că toate evenimentele elementare sunt echiprobabile şi egale cu *1/cardΩ.* Or, semnele după care aflăm dacă putem aplica definiția clasică sunt cele care atestă echiprobabilitatea evenimentelor elementare, cum ar fi sintagmele „ extragere la intamplare”, „monedă perfectă” sau „simetrică”, zar „perfect” sau „simetric” etc.

Exemplul 1. Să se calculeze probabilitatea că la aruncarea unui zar *perfect*, de două ori succesiv, suma numerelor de puncte apărute va fi egală cu 5 (evenimentul aleator *A*).

Rezolvare. Spațiul de evenimente elementare $\Omega = \{(i, j)\colon 1 \le i, j \le 6\}$. Favorabile evenimentului *A* sunt evenimentele elementare $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$. Cum *card A* = 4 şi *card* Ω = 36, avem

In[1]:=N[4/36]

Out[1]=0,111111.

Exemplul 2. O urnă conține 60 de bile albe şi 40 de bile negre. 1) Să se calculeze probabilitatea că o bilă extrasă la întâmplare va fi albă (evenimentul A). 2) Să se calculeze probabilitatea că douăsprezece bile extrase fără întoarcere vor fi albe (evenimentul B).

Rezolvare. 1) Printre cele 100 de bile din urnă 60 sunt albe. Deci card $\Omega = 100$ şi card $A = 60$. Prin urmare valoarea exactă $\boldsymbol{P}(A) = 60/100 = 0{,}6$.

2) Deoarece 12 bile din 100 pot fi extrase în C_{100}^{12} moduri, iar 12 bile din cele 60 existente pot fi extrase în C_{60}^{12} moduri, conform definiției clasice a probabilității şi formulei de calcul a numărului de combinări din n elemente luate câte m:

$$C_n^m = \frac{n!}{(m!)((n-m)!)} \tag{2.4}$$

avem:

In[2]:=N[$\frac{60\,!}{(12\,!)\,*\,(48\,!)} / \frac{100\,!}{(12\,!)\,*\,(88\,!)}$ **]**

Out[2]]=0.00133219

Am obținut rezultatul $\boldsymbol{P}(B)$=0,00133219.

2.3. Probabilitate discretă

Aria de aplicabilitate a probabilității clasice este, după cum arată şi urmatoarele exemple, limitată.

Exemplul 1. Considerăm aruncarea o singură dată a unui zar, a cărui centru de greutate este deplasat astfel încât probabilitățile apariției fețelor 1,2,3,4,5,6 se raportează ca 1:2:3:4:5:6. Să se afle probabilitatea apariției unui număr par de puncte.

Din acest exemplu se vede că formula probabilității clasice este inaplicabilă deoarece **rezultatele posibile nu sunt echiprobabile**, chiar dacă mulțimea lor(spațiul de evenimente elementare) este finită.

Un alt motiv pentru care formula probabilității clasice poate fi imposibil de aplicat este faptul că mulțimea de rezultate posibile într-un experiment este infinită, fie şi numărabilă (cazul discret).

Exemplul 2. Considerăm experimentul aleator ce constă în aruncarea unei monede „perfecte" până la înregistrarea prima dată a „Stemei". Ne interesează, de exemplu, probabilitatea că experimentul se va termina în urma a cel mult zece aruncari. Exemplul 4 din p.2.1. arată că acestui experiment îi corespunde un spațiu de evenimente elementare infinit, numărabil ca mulțime, ceea ce face imposibilă aplicația formulei probabilității clasice.

În scopul posibilității abordării cazurilor mentionate în exemplele 1-2, se foloseşte noțiunea de probabilitate discretă sau de camp de probabilitate discretă.

Definiția probabilității discrete. Vom spune ca ***avem de a face cu o probabilitate discretă P*** dacă:

a) spațiul de evenimente elementare Ω reprezintă o multime finită sau infinită, cel mult, numărabilă, adică $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots\}$;

b) familia de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ este reprezentată de toate submulțimile posibile ale lui Ω;

c) P este o aplicatie definită pe $\mathscr{F}$ cu valori în mulțimea numerelor reale calculate conform formulei:

P(A)*=suma probabilităților pentru fiecare eveniment elementar ce favorizeaza evenimentul A*= $\sum_{\omega_i:\omega_i\in A} P\{\omega_i\}$, unde ***P*** verifică următoarele 2 axiome:

A1. $\boldsymbol{P}\{\omega_i\}\geq 0$, pentru orice $i\geq 1$;

A2. $\boldsymbol{P}(\Omega)= \sum_{\omega_i:\omega_i\in\Omega} P\{\omega_i\} =1.$

P(A), reprezentând un număr, se numeşte ***probabilitatea evenimentului*** *A,* iar tripletul (Ω,$\mathscr{F}$, ***P***) - ***câmp de probabilitate discretă***.

Exemplul 3. *(continuare Exemplul 1).* Observăm că în acest exemplu sunt întrunite toate condițiile aplicabilității definiției probabilității discrete:

1. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_6\}=\{1.2,\ldots,6\}$, adică *spațiul de evenimente elementare este o mulțime finită;*
2. Familia de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ este reprezentată de toate submulțimile posibile ale lui Ω, iar în ea regăsim şi evenimentul nostru *A*={*va apare un număr par de puncte}={2,4,6}*.
3. Tinând cont de cum se raportează probabilitățile $\boldsymbol{P}\{i\}$, deducem că $\boldsymbol{P}\{i\}=i/21$. $i=1,2,\ldots,6$, ceea ce inseamnă că sunt verificate axiomele *A1* şi *A2* de mai sus.

În concluzie ***P(A)****=2/21+4/21+6/21=12/21*. Or, spre deosebire de cazul clasic (zarul nefiind „perfect”) ***P(A)****=12/21>1/2*.

Exemplul 2. *(continuare).* Observăm că şi în acest exemplu sunt întrunite toate condiţiile aplicabilităţii definiţiei probabilităţii discrete:

1. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_n,...\}=\{S, BS,BBS,BBBS,...\}$, adică spaţiul de *evenimente elementare este o mulţime infinită numărabilă;*

2. Familia de evenimente aleatoare $\mathcal{F}$ este reprezentată de toate submulţimile posibile ale lui Ω, iar in ea regasim şi evenimentul nostru *A={experimentul se va termina în urma a cel mult 10 aruncări}*$=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_{10},\}=$
$=\{S, BS,BBS,BBBS,...,BBBBBBBBBS\}$.

3. Deoarece experimentul vizează aruncarea unei monede „perfecte”, putem afirma că $\mathbf{P}\{\omega_i\}=1/2^i$, pentru orice $i=1,2,...,n,...$. Într-adevar evenimentul elementar ω_i reprezintă unul din cele 2^i evenimente elementare în experimentul cu aruncarea unei monede „perfecte” de *i* ori. Cum acestea sunt echiprobabile, rezultă că şi ω_i are aceeasi probabilitate $1/2^i$. Or, axioma *A1* este valabilă. Este valabila şi axioma *A2* , deoarece $1/2+1/2^2+1/2^3+...=(1/2)/(1-1/2)=1$.

În concluzie,

$$\mathbf{P}(A)= 1/2+1/2^2+...+1/2^{10}= (1/2)[1-(1/2)^{10}]/(1-1/2)=1-(1/2)^{10}.$$

2.4. Probabilitate geometrică

În practică se întâlnesc situaţii când modelul probabilist al experimentului aleator are de-a face cu evenimente elementare echiprobabile, dar pentru care spaţiul de evenimente elementare este o mulţime infinită nenumărabilă (caz continuu). Drept exemplu putem lua următorul experiment imaginar, care în orice limbaj de programare evoluat (C++, Java, etc.) poate fi reprodus, folosind generatorul de numere (pseudo)aleatoare realizat de funcţia RANDOM .

Exemplu *(aruncarea unui punct la întâmplare pe segmentul [0,1]).* Considerăm experimentul aleatoriu ce constă în aruncarea la întamplare a unui punct pe segmentul [0,1]. Dată fiind sintagma „la întâmplare ”, rezultatele posibile ω în acest experiment, fiind numere reale din [0,1], sunt echiprobabile, dar definiţia clasică este inaplicabilă, deoarece spaţiul de evenimente elementare $\Omega=[0,1]$ este o mulţime infinită nenumărabilă. Pentru astfel de cazuri putem apela la

Definiția probablitații geometrice. Vom spune ca ***avem de-a face cu o probabilitate geometrică P*** dacă:

a) spațiul de evenimente elementare Ω reprezintă o mulțime infinită nenumărabilă din $\mathbf{R}^n$ pentru care $mes\Omega < +\infty$, unde *mes* reprezintă *lungimea* în $\mathbf{R}^1$, *aria* în $\mathbf{R}^2$ şi *volumul* în $\mathbf{R}^n$ pentru $n \geq 3$;

b) Familia de evenimente aleatoare $\mathcal{F}$ este reprezentată de toate submulțimile măsurabile A ale lui Ω, adică pentru care *mes* A poate fi definită;

c) P este o aplicație definită pe $\mathcal{F}$ cu valori în mulțimea numerelor reale calculate conform formulei:

$$\boldsymbol{P}(A)=mesA \;/\; mes\Omega.$$

Astfel, în exemplul invocat, aplicând definitia probabilitatii geometrice aflăm că probabilitatea ca un punct aruncat la întâmplare pe [0,1] va nimeri în punctul x este egală cu $\boldsymbol{P}\{x\}=mes\{x\}/mes([0,1])=0/1=0$, pentru orice x din [0,1]. Dacă ne interesează, de exemplu, probabilitatea că un punct aruncat la întâmplare pe [0,1] va nimeri în prima jumătate a acestui interval este egaăa cu $\boldsymbol{P}([0,0.5])= mes([0,0.5]) \;/\; mes([0,1])=0.5/1=0.5$. De altfel, observăm că $\boldsymbol{P}([0,0.5])= \boldsymbol{P}([0.5,1])$. În genere, probabilitatea că un punct aruncat la întamplare pe [0,1] va nimeri într-un interval (a,b) din [0,1] coincide cu lungimea acestui interval.

2.5. Probabilități condiționate. Formula înmulțirii probabilităților. Independența evenimentelor aleatoare

Fie A şi B două evenimente aleatoare legate de acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega,\mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, unde P(B)>0. Atunci putem da

Definiția 1. Se numeşte ***probabilitate a evenimentului*** *A* ***condiționată de evenimentul B*** mărimea notată cu ***P(A/B)*** şi calculată după formula

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{2.5}$$

Din (2.5) rezultă *formula înmulțirii probabilităților pentru două evenimente aleatoare:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \tag{2.6}$$

Are loc următoarea

Teoremă (*Formula înmulțirii probabilităților în caz general*).

Dacă (Ω, F, P) *este un câmp de probabilitate şi* A_1 , A_2 ,..., A_n *sunt evenimente aleatoare legate de acest câmp cu proprietatea*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0,$$

atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \tag{2.7}$$
$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Definiția 2.Vom spune că *două evenimente aleatoare A şi B,* legate de acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, *sunt independente* dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definiția 3.Vom spune că *evenimentele aleatoare A_1, A_2,..., A_n*, legate de acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$, *sunt independente două câte două* dacă $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ pentru orice *i* diferit de *j, i,j=1,2,...,n.*

Definiția 4. Vom spune ca *evenimentele aleatoare A_1, A_2,..., A_n*, legate de acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$, *sunt independente (în totalitate)* dacă

$$P(Ai_1 \cap Ai_2 \cap \ldots \cap Ai_k) = P(Ai_1)P(Ai_2)\ldots P(Ai_k)$$

pentru orice set de indici diferiți $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ din mulțimea de indici $\{1,2,\ldots,n\}$, k=2,3,...,n.

Observația 1. ***Din definițiile respective deducem că, independența (în totalitate) atrage după sine şi independența a două câte două evenimente. Afirmația inversă, insă, nu are loc.*** Drept (contra)exemplu putem lua experimentul aleator ce constă în aruncarea unui tetraedru „perfect”, cu cele 4 fețe vopsite astfel: fața 1 vopsita în albastru, fața 2-în galben, fața 3-în rosu şi fața 4-în albastru, galben şi roşu. Se verifică cu uşurință că evenimentele *A={va apare culoarea albastră}, G={va apare culoarea galbenă}, R={va apare culoarea roşie}* sunt independente 2 cate 2, dar nu şi în totalitate.

Observația 2. În cazul când evenimentele aleatoare A_1, A_2, ..., A_n sunt independente, atunci formula înmulțirii probabilităților are forma

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n). \tag{2.8}$$

Propoziție (*Formula lui Poisson*). *Daca evenimentele A_k, sunt independente (în totalitate) şi probabilitățile $\boldsymbol{P}(A_k) = p_k$, k=1,2,…,n sunt cunoscute, atunci probabilitatea*

P*{se va produce cel puțin unul din evenimentele A_k, k=1,2,…,n}=*

$=1-[(1-\boldsymbol{P}(A_1))(1-\boldsymbol{P}(A_2))\dots(1-\boldsymbol{P}(A_n)]=1-[(1-p_1)(1-p_2)_{\dots}(1-p_n)]$.

Exemplul 3. Un aparat constă din trei elemente care în timpul funcționării lui se pot deteriora, independent unul de altul. Notăm prin A_i = {*elementul i se va deteriora*}, i = 1, 2, 3. Să se calculeze probabilitatea evenimentului A = *{se va deteriora un singur element}*, B = *{se va deteriora, cel puțin, un element}* dacă se știu probabilitățile: $p_1 = P(A_1) = 0{,}13$, $p_2 = P(A_2) = 0{,}06$, $p_3 = P(A_3) = 0{,}12$.

Rezolvare. Vom exprima evenimentul aleator A prin intermediul evenimentelor A_1, A_2 și A_3. Evenimentul A se va produce atunci și numai atunci când se va deteriora primul element iar al doilea – nu **şi** al treilea – nu, **sau** se va deteriora al doilea element, iar primul - nu **şi** al treilea – nu, **sau** se va deteriora al treilea element, iar primul – nu **şi** al doilea – nu. Prin urmare, conform definițiilor operațiior asupra evenimentelor aleatoare, avem:

$$A=(A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3).$$

Calculăm probabilitatea evenimentului A folosind succesiv: formula de adunare a probabilităților pentru evenimente incompatibile (disjuncte) două câte două, formula de înmulțire a probabilităților evenimentelor independente (în totalitate) și formula de calcul a probabilității evenimentului opus.

In[3]:=N[0.13*(1–0.06)*(1–0.12)+(1–0.13)*0.06*(1–0.12)+(1–0.13)*(1–0.06)*0.12]

Out[3]]=0,251608

Am obținut ***P****(A)*=0,251608.

Prin analogie, folosind Formula lui Poisson, calculăm *P(B)*.

Exemplul 4. Presupunem că, într-un lot de 100 de piese de acelaşi tip, 7 piese sunt defecte. Extragem la întâmplare fără întoarcere 5 piese. Dacă toate piesele sunt fără defecte, atunci lotul este acceptat. În caz contrar este refuzat. Să se calculeze probabilitatea evenimentului A = *{lotul va fi acceptat}*.

Rezolvare. Notăm: A_i = *{piesa cu numărul de ordine de extragere i va fi fără defecte}, i = 1, 2, 3, 4, 5*. Are loc egalitatea

$$A=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5.$$

Conform formulei (7) avem

$$P(A)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)P(A_4\mid A_1\cap A_2\cap A_3)\times$$
$$\times P(A_5\mid A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4).$$

Aplicăm Sistemul Mathematica.

In[4]:=N[$\frac{93}{100} * \frac{92}{99} * \frac{91}{98} * \frac{90}{97} * \frac{89}{96}$ **]**

Out[4]=0.690304

Obținem $P(A)$=0,690304.

În cazul când produsul calculat anterior conține un număr mare de factori, atunci scrierea lui necesită timp relativ îndelungat. Dacă factorii pot fi scrişi în formă de o funcție de un parametru *i*, atunci poate fi utilizată funcția **Product[f,{i,i_{min},i_{max}}].** Cum în acest exemplu avem

$$P(A) = \prod_{i=0}^{4} \frac{93-i}{100-i},$$

putem proceda după cum urmează.

In[5]:=Product[$\frac{93-i}{100-i}, \{i,0,4\}$ **]**

Out[5]= $\frac{824941}{1195040}$

Am obținut valoarea exactă a probabilității evenimentului *A*. Ne vom convinge că o valoare aproximativă a expresiei obținute coincide cu cea obținută în **Out[4]**

In[6]:=N[%]

Out[6]=0.690304.

2.6. Formula probabilității totale. Formula lui Bayes

Teoremă. *Dacă A şi H_1, H_2, ..., H_n,... sunt evenimente aleatoare legate de acelaşi câmp de probabilitate* (Ω,$\mathcal{F}$, ***P***) *şi satisfac condițiile :*

a) evenimentul A implică producerea cel puțin a unuia din evenimentele H_1, H_2, ..., H_n,... ;

b) *evenimentele H_1, H_2, ..., H_n,... sunt incompatibile două câte două;*

c) $\mathbf{P}(H_i)>0$,

*atunci au loc **formula probabilității totale***

$$P(A)= P(H_1)P(A|H_1)+...+P(H_n)P(A|H_n)+... \qquad (2.9)$$

*şi **formula lui Bayes***

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j)P(A \mid H_j)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + ... + P(H_n)P(A \mid H_n) + ...}. \quad (2.10)$$

Exemplul 5. La un depozit sunt 1000 de piese de acelaşi tip (identice), fabricate de uzinele nr.1, nr.2 şi nr.3, în proporţie de 5:3:2. Se ştie că n_i% din piesele fabricate de uzina i sunt cu defecte: $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$.
1) Să se calculeze probabilitatea că o piesă extrasă la întâmplare va fi calitativă. **2)** Să se calculeze probabilitatea că o piesă extrasă la întâmplare va fi una fabricată de uzina nr.1, dacă se ştie că această piesă este cu defecte.

Rezolvare.1) Notăm: A = *{piesa luată la întâmplare va fi calitativă}*. În dependență de uzina la care a fost fabricată piesa extrasă pot fi enunțate ipotezele: H_i = *{piesa luată a fost fabricată de uzina nr.i}*, $i = 1, 2, 3$. Din condițiile problemei rezultă că uzina nr.1 a fabricat 500 de piese din cele existente la depozit, uzina nr.2 - 300 de piese şi uzina nr.3 - 200 de piese. Aplicând definiția clasică a probabilității, avem: $P(H_1)$ = 500/1000 =0,5, $P(H_2)$ = 300/1000 = 0,3, şi $P(H_3)$ = 200/1000 = 0,2. Cum n_i% din piesele fabricate de uzina i sunt cu defecte, rezultă că $(1-n_i)$% din piese sunt calitative. Deci $P(A|H_1)$ = 0,96, $P(A|H_2)$ = 0,95 şi $P(A|H_3)$ = 0,94. Aplicând formula probabilității totale (2.9).

In[7]:=N[(0.5*0.96 + 0.3*0.95 + 0.2*0.94]
Out[7]=0.953
Deci, $P(A)$=0,953.

2) Conform notației din punctul 1 avem $\overline{A}$ = {*piesa luată la întâmplare este cu defecte*}. Cum $P(\overline{A} \mid H_1)$ = 0,04, $P(\overline{A} \mid H_2)$ = 0,05, $P(\overline{A} \mid H_3)$ = 0,06, din formula lui Bayes (10) avem

$$P(H_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_1)P(\overline{A} \mid H_1)}{P(H_1)P(\overline{A} \mid H_1) + P(H_2)P(\overline{A} \mid H_2) + P(H_3)P(\overline{A} \mid H_3)}$$

In[8]:=N[$\frac{0.5 * 0.04}{0.5 * 0.04 * 0.3 * 0.05 + 0.2 * 0.06}$ **]**
Out[8]=0.425532
Am obținut $P(H_1 \mid \overline{A})$ =0,425532.

2.7. Probe Bernoulli (Experimente independente)

Definiţie. Experimentul aleator $\mathcal{E}$ se numeşte probă Bernoulli dacă sunt întrunite următoarele condiţii:

a) mulţimea de rezultate posibile constă numai din două rezultate, numite conventional, „succes" şi "insucces";

b) probabilitatea $p=\boldsymbol{P}\{\text{„succes"}\}$ este o mărime ce nu variază de la o probă la alta;

c) rezultatele unei probe nu influenţează rezultatele celorlalte probe, i.e., probele sunt independente.

Drept exemplu, putem lua aruncarea unei monede sau aruncarea unui zar, dacă ne interesează apariţia sau nu, să zicem, a unui numar par. Mai mult ca atât, **orice experiment aleator $\mathcal{E}$ poate fi privit ca o probă Bernoulli, de îndata ce ne interesează doar producerea sau nu a unui eveniment aleator A legat de acest experiment, cu condiţia că $\mathcal{E}$ să poată fi repetat independent unul de altul, practic, în aceleaşi condiţii.** În acest caz, experimentele aleatoare $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ se numesc *independente* dacă ele reprezintă repetarea uneia şi aceleiaşi probe Bernoulli $\mathcal{E}$ de n ori. Experimentele independente pot fi tratate ca o experienţă care se repetă de n ori.

2.8. Schema binomială (sau schema bilei întoarse în cazul a două culori posibile). Distribuţia (repartiţia) binomială

Fie că în fiecare din n experimente independente $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ evenimentul A poate să se realizeze cu probabilitatea p: $p = \boldsymbol{P}(A)$. Atunci probabilitatea că evenimentul A nu se produce este egală cu $q = P(\overline{A}) = 1-P(A) = 1-p$. Atunci are loc următoarea

Teoremă. *Probabilitatea $P_n(k)$, că evenimentul A se va realiza exact de k ori în n experimente independente (probe Bernoulli) cu probabiliatatea succesului $(0<p<1)$, în fiecare probă, poate fi calculată dupa formula*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Formula (2.11) se numeşte ***distribuţie (repartiţie) Binomială***, iar în cazul $n=1$ se numeşte ***distribuţie Bernoulli.***

Exemplu (***Schema bilei întoarse în cazul a două culori***). Presupunem că avem o urnă cu M bile albe şi N bile negre. Utilizând definiția clasică a probabilității, putem arăta că probabilitatea $\boldsymbol{P}_{M+N}\,(k)$ a evenimentului că din $M+N$ bile, extrăgând la întâmplare n bile cu intoarcere (repetare), vor fi extrase exact k bile albe, se calculează după formula

$$Pn(k)= C_n^k[M/(M+N)]^k[1-M/(M+N)]^{n-k}\ ,\ \ k = 0, 1,..., n.$$

Observăm că aceasta coincide cu distributia Binomială (2.11). De altfel, schema bilei întoarse înseamnă că bilele se extrag din urnă una câte una şi fiecare bilă extrasă, este, după observarea culorii ei, întoarsă din nou în urnă.

Exemplul 6. Considerăm aruncarea unei monede "perfecte" de 100 de ori. Să se calculeze, cu aproximație, probabilitatea că "Stema" va apare exact de 47 ori.

Rezolvare. Fie evenimentul $A = \{$*va apare "Stema"*$\}$. Avem: $p = P(A) = 1/2$ şi $q = 1-p = 1/2$. Conform formulei Binomiale (11), pentru $n = 100$, $k = 47$, $p = 1/2$ şi $q = 1/2$, avem

$$P_{100}\,(47) = C_{100}^{47}\,(1/2)^{47}\,(1/2)^{100-47}\ .$$

Calculul acestei valori prin metode obişnuite este posibil, dar prezintă dificultăți. Apelând la Sistemul Mathematica avem :

In[9]:= $\dfrac{100\,!}{(47\,!)*(53\,!)}(0.5)^{47}\,(0.5)^{53}$

Out[9]=0.0665905

Aşadar, $P_{100}(47)=0,0665905$.

2.9. Schema (repartiția) multinomială (polinomială), sau schema bilei întoarse în cazul bilelor de mai multe culori

Fie că în rezultatul fiecărui din n experimentele independente $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2,..., \mathcal{E}_n$ pot să se realizeze evenimentele aleatoare $A_1, A_2, ..., A_r$, care formează un sistem complet de evenimente, i.e., acestea sunt incompatibile două câte două şi suma (reuniunea) lor coincide cu evenimentul sigur. Notăm: $p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, ..., r$. Evident, $p_1 + p_2 + ... + p_r = 1$. Atunci are loc următoarea

Teoremă *(Distribuția Multinomială).* *Probabilitatea $P_n(k_1,k_2,...,k_r)$ că în urma a n experimente independente, evenimentele A_i se vor realiza de k_i ori fiecare, unde $i = 1, 2, ..., r$, $n = k_1 + k_2 + ... + k_r$, poate fi calculată conform formulei*

$$P_n(k_1,k_2,...,k_r) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ...\cdot k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r} \; . \qquad (2.12)$$

Observaţie. Formula (2.12) defineşte, asa-numita *Distribuție Multinomială,* distribuție care coincide, evident, în cazul $r=2$, cu *Distribuția Binomială* definită de formula (2.11).

Exemplul 7. Presupunem că într-o urnă avem următoarea componență de bile de trei culori: 5 bile albe, 7 bile negre şi 8 bile albastre. Se extrag succesiv, cu repetare (revenire) 6 bile. Care este probabilitatea că printre aceste 6 bile una va fi albă, două vor fi negre şi trei vor fi albastre?

Rezolvare. Fie evenimentele: $A_1 = \{$*bila extrasă va fi albă*$\}$, $A_2 = \{$*bila extrasă va fi neagră*$\}$ şi $A_3 = \{$*bila extrasă va fi albastră*$\}$. Atunci: $p_1 = P(A_1) = 5/(5+7+8) = 1/4$, $p_2 = P(A_2) = 7/20$, şi $p_3 = P(A_3) = $ $= 8/20 = 2/5$. Aplicând formula (8.1.12) cu $n = 6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, şi $k_3 = 3$, obținem

$$P_6(1,2,3) = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{7}{20}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3 .$$

Calculăm această expresie cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[10]:= $\frac{6!}{(1!)*(2!)*(3!)} * (1/4)^1 * (7/20)^2 * (2/5)^2$

Out[10]= $\frac{147}{1250}$

Am obținut valoarea exactă $P_6(1,2,3) = \frac{147}{1250}$ **.**

Dacă vrem să obținem o valoare aproximativă sau o valoare dată exprimată prin fracții zecimale, atunci

In[11]:=N[%]

Out[11]=0.1176

Am obținut valoarea $P_6(1,2,3) = 0,1176$.

2.10. Schema Poisson. Funcția generatoare de probabilități

Fie că în fiecare din experimentele independente $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ..., \mathcal{E}_n$ evenimentul A se poate produce, respectiv, cu probabilitățile $p_1, p_2, ..., p_n$. Atunci are loc următoarea

Teoremă (*Schema Poisson*). *Probabilitatea $P_n(k)$ că, în urma a n experiențe independente descrise mai sus, evenimentul A se va produce de k ori, $k = 1, 2, ..., n$, coincide cu coeficientul lui x^k din expresia*

$$\varphi_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_i x)\,, \tag{2.13}$$

unde $q_i = 1-p_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Funcția $\varphi_n(x)$ din formula (2.13) se numeşte *funcție generatoare de probabilități.*

Observație. Schema Binomială devine un caz particular al schemei Poisson şi anume, atunci când $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$. În acest caz funcția generatoare de probabilități are forma

$$\varphi_n(x) = (q+px)^n. \tag{2.14}$$

Exemplul 8. Din trei loturi de piese de acelaşi tip se extrage la întâmplare câte o piesă. Se ştie că din piesele primului lot 95% sunt calitative, din al doilea - 90% şi din al treilea - 85%. Să se calculeze probabilitățile evenimentelor: B = {*toate trei piese vor fi calitative*}, C = {*două piese vor fi calitative şi una nu*}, D = {*o piesă va fi calitativă şi două nu*}, E = {*toate trei piese vor fi necalitative*}.

Rezolvare. Aplicând formula (2.13) cu $p_1 = 0{,}95$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}85$, $q_1 = 0{,}05$, $q_2 = 0{,}1$, $q_3 = 0{,}15$, $n = 3$, aflăm funcția generatoare $\varphi_3(x)$ cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[12]:=Collect[(0.05+0.95x)*(0.1+0.9x)*(0.15+0.85x),x]

Out[12]=0.00075+0.02525x+0.24725x^2+0.72675x^3.

De unde găsim că: $P(B) = 0{,}72675$, $P(C) = 0{,}24725$, $P(D) = 0{,}02525$, $P(E) = 0{,}00075$.

2.11. Schema bilei neîntoarse în cazul a două culori (Repartiția Hipergeometrică)

Fie că într-o urnă sunt n bile dintre care n_1 sunt albe şi n_2 sunt negre. Se extrag la întâmplare, fără întoarcere, m bile, $m < n$. Atunci are loc următoarea

Teoremă (*Schema bilei neîntoarse în cazul a două culori*). *În schema descrisă mai sus, probabilitatea* $P_n(m_1,m_2)$, *că printre* m *bile extrase* m_1 *vor fi albe şi* m_2 *negre,* $m= m_1+ m_2$, *se calculează conform formulei*

$$P_n(m_1,m_2)=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}}{C_n^m}\,. \tag{2.15}$$

această probabilitate fiind nulă dacă există cel puțin o valoare i pentru care $m_i>n_i$, $i=1,2$.

Formula (2.15) defineşte, aşa- numita, *repartiție Hipergeometrică.*

Exemplul 9. Presupunem că într-un lot de 100 de bilete de loterie 20 de bilete sunt câştigătoare. Să se calculeze probabilitatea ca din 7 bilete cumpărate 2 bilete vor fi cu câştig.

Rezolvare. Aplicăm formula (2.15) în care, conform datelor problemei, $n=100$, $n_1 = 20$, $n_2 =80$, $m_1 = 2$, $m_2 = 5$, $m = 7$. Avem:

$$P_7(2,5) = \frac{C_{20}^{2} C_{80}^{5}}{C_{100}^{7}}$$

Calculăm o valoare aproximativă a acestei expresii.

In[13]:=N[($\frac{20\,!}{(2!)*(18\,!)} * \frac{80\,!}{(5!)*(75\,!)}$) /($\frac{100\,!}{(7!)*(93\,!)}$) **]**

Out[13]=0.28534

Am obținut rezultatul $P_7(2,5)$=0,28534.

2.12. Schema bilei neîntoarse în caz general

Fie că avem o urnă în care sunt n bile, din care n_i bile sunt de culoarea i, $i = 1, 2, ..., r$, $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$. Se extrag succesiv fără revenire m bile, $m < n$. Atunci are loc următoarea

Teoremă (*Schema bilei neîntoarse în caz general*) . *În schema descrisă mai sus, probabilitatea $P_n(m_1, m_2,..., m_r)$ că printre bilele extrase m_i vor fi de culoarea i, $i = 1, 2, ..., r$, $m = m_1 + m_2 + ... + m_r$, se* calculează conform formulei

$$P_n(m_1, m_2,..., m_r) = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} ... C_{n_r}^{m_r}}{C_n^m}, \tag{2.16}$$

această probabilitate fiind nulă dacă există cel putin o valoare i pentru care $m_i>n_i$, $i=1,...,r$.

Exemplul 10. Într-un depozit sunt 200 de piese de acelaşi tip, din care 100 sunt de calitatea întâi, 66 de calitatea a doua şi 34 de calitatea a treia. Se iau la întâmplare fără întoarcere 30 piese. Care este probabilitatea că printre ele 17 să fie de calitatea întâi, 9 de calitatea a doua şi 4 de calitatea a treia?

Rezolvare. Aplicăm formula (2.16) cu $n = 200$, $m = 30$, $n_1 = 100$, $n_2 = 66$, $n_3 = 34$, $m_1 = 17$, $m_2 = 9$, $m_3 = 4$. Conform Schemei bilei neîntoarse în caz general, probabilitatea în cauză este

$$P_{30}(17,9,4) = \frac{C_{100}^{17} C_{66}^{9} C_{34}^{4}}{C_{200}^{30}}.$$

Calculăm o valoare aproximativă a acestei expresii cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[14]:=N[($\frac{100\,!}{(17\,!)(83\,!)} * \frac{66\,!}{(9!)(57\,!)} * \frac{34\,!}{(4!)(30\,!)}$) /($\frac{200\,!}{(30\,!)(170\,!)}$) **]**

Out[14]=0.0278641

Am obținut $P_{30}(17,9,4)$ =0,0278641.

2.13. Schema (repartiția) geometrică

Considerăm experimentul aleator, ce constă în repetarea unei probe Bernoulli, cu probabilitatea „succesului” p în fiecare probă, până la prima înregistrare a „succesului”. Atunci are loc următoarea

Teoremă. *În schema descrisă mai sus, probabilitatea* ***P(k)=P{****„succesul” se va realiza prima dată în proba cu numărul de ordine k* **}** *se calculează conform formulei*

$$\boldsymbol{P(k)} = pq^{k-1},\ k=1,2,... \qquad (2.17)$$

iar probabilitatea ***P(k)=P{*** *pâna la producerea prima dată a „succesului” vor fi înregistrate exact k „insuccese”***}** *se calculează conform formulei*

$$P(k) = pq^{k},\ k=0,1,2,... \qquad (2.17')$$

unde $q = 1-p$.

Observație. Distribuția definită de formula (2.17) se numeşte ***geometrică, trunchiată în zero,*** iar cea definită de formula (2.17') se numeşte, pur şi simplu, **geometrică**.

Exemplul 11. 1) Să se calculeze probabilitatea apariției feței 4, pentru prima dată, la aruncarea a zecea a unui zar „perfect”. 2) Care este probabilitatea evenimentului aleator B = {*la aruncarea unui zar „perfect”, fața 3 nu va apărea mai devreme de primele 10 aruncări*}?

Rezolvare. 1) Cum $p = 1/6$ şi $q = 1-1/6 = 5/6$, din formula (2.17) obținem $P(10) = pq^9 = (1/6)(5/6)^9$.

In[15]:=N[(1/6)*(5/6)^9]

Out[15]=0.0323011
Am obținut $P(10) = 0{,}0323011$.

2) Evenimentul B poate fi definit şi astfel: B = {numărul 4 va apărea pentru prima dată la aruncarea a unsprezecea, sau a douăsprezecea, sau a treisprezecea, ...}. Deci

$P(B) = P(11) + P(12) + P(13) + ... = \sum_{k=11}^{\infty} (1/6)(5/6)^{k-1}$.

Calculăm această sumă cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[16]:=Sum[(1/6)*(5/6)^(k–1),{k,11,∞}]

Out[16]= $\dfrac{9765625}{60466176}$.

Am obținut valoarea exactă a probabilității lui B. Obținem o valoare exprimată prin fracții zecimale.

In[17]:=N[%]
Out[17]=0.161506
Aceeaşi valoare poate fi obținută şi în modul ce urmează.
In[18]:=NSum[(1/6)*(5/6)^(k–1),{k,11,∞}]
Out[18]=0.161506.

2.14. Teoreme Limită privind calculul valorilor aproximative ale probabilității din schema Binomială

Pentru n şi m relativ mari calculul probabilității conform distribuției Binomiale prezintă mari dificultăți, dacă nu se aplică Sistemul Mathematica. În acest caz se folosesc formule de calcul ale unor valori aproximative ale acestei probabilități. Una din aceste formule rezultă din

Teorema Limită Locală Moivre-Laplace. *Pentru valori întregi ale lui n, suficient de mari, are loc următoarea formulă de aproximare*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}, \qquad (2.18)$$

unde $0 < p < 1$, *iar* $P_n(k)$ *este probabilitatea ca evenimentul aleator A cu P(A) = p, q = 1–p, se va realiza exact de k ori în urma a n probe Bernoulli cu probabilitatea „succesului" p în fiecare probă.*

În cazul când probabilitatea p este aproape de 0 sau q este aproape de 1, atunci o mai bună aproximație ne-o oferă

Teorema Limită Poisson. *Dacă np tinde la un număr a>0, când n tinde la +∞ iar p (0<p<1) tinde la 0, atunci*

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ *tinde la* $\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, *adică pentru n suficient de mare*

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad (2.19)$$

luând a = np.

Observație. Se recomandă ca această formula să fie aplicată atunci, când $npq < 9$, iar în celelelte cazuri – formula (2.18). Probabilitățile din partea dreapta a formulei (2.19) definesc aşa - numita, **distribuție Poisson.**

O valoare aproximativă a probabilității $P_n(k_1, k_2)$ că în urma a n experimente independente numărul *total* de realizări ale evenimentului aleator A va fi cuprins între k_1 şi k_2 poate fi calculată, aplicând

Teorema Limită Centrală (forma Moivre-Laplace). *Dacă n tinde la* $+\infty$, *atunci* $P_n(k_1, k_2)$ *tinde la* $\Phi\left(\dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$,

adica pentru n suficient de mare

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (2.20)$$

unde $\Phi(x)$ *este funcția Laplace care se defineşte prin egalitatea*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt. \qquad (2.21)$$

Formula (2.20) rezultă din teorema integrală Moivre-Laplace.

Având la dispoziție Sistemul Mathematica în multe cazuri putem aplica atât formula exacta de calcul, cât si formulele (2.18) – (2.21). Prin urmare, putem cerceta şi compara erorile care se obțin la aplicarea lor.

Exemplul 12. Presupunem probabilitatea că o piesă, fabricată de o uzină, va avea defecte este egală cu $p = 0{,}01$. 1) Să se calculeze probabilitatea că din 10000 de piese luate la întâmplare 90 vor fi cu defect, folosind: a) distribuția Binomială (2.11); b) formula locală Moivre-Laplace (2.18); c) formula Poisson (2.19). 2) Care este probabilitatea ca numărul de piese cu defect să fie cuprins între 95 şi 105?

Rezolvare. 1) a) Valoarea exactă a probabilității căutate este dată de formula Binomială:

$$P_{10000}(90) = C_{10000}^{90}(0{,}01)^{90}(0{,}99)^{9910}.$$

Folosim Sistemul Mathematica

In[19]:=N[= $\frac{10000!}{(90!)(10000-90)!}(0.01)^{90}(0.99)^{10000-90}$ **]**

Out[19]=0.0250257

Am obținut rezultatul $P_{10000}(90) \approx 0{,}0250257$.

b) Conform formulei (2.18) avem

$$P_{10000}(90) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10000 \cdot 0.01 \cdot 0.99}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{90-10000\cdot 0.01}{\sqrt{10000\cdot 0.01\cdot 0.99}}\right)^2}.$$

Pentru calculul valorii acestei expresii folosim Sistemul Matematica.

In[20]:=N

$[\frac{1}{\sqrt{2*\pi*10000*0.01*0.99}} Exp[-\left(\frac{90-10000*0.01}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}\right)\hat{}2/2]]$

Out[20]=0.0241965

Am obținut rezultatul $P_{10000}(90) \approx 0.0241965$.

c) Calculăm probabilitatea cerută cu ajutorul formulei (2.19). Avem

$$P_{10000}(90) \approx \frac{(10000\cdot 0{,}01)^{90}}{90!} e^{-10000\cdot 0{,}01}.$$

Folosim Sistemul Mathematica.

In[21]:=N $\frac{(10000*0{,}01)^{90}}{90!} Exp[-10000*0.01]]$

Out[21]=0.0250389

Am obținut rezultatul $P_{10000}(90) \approx 0.0250389$.

3) Conform formulelor (2.20) şi (2.21) avem

$$P_{10000}(95 \le k \le 105) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{95-10000*0.1}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}}^{\frac{105-10000*0.01*0{,}99}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}} e^{-t^2/2}dt.$$

Pentru calculul acestei integrale folosim Sistemul Mathematica.

In[22]:=NIntegrate[$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Exp[-t^2/2]$,{t, $\frac{95-10000*0.01}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}$, $\frac{105-10000*0.01}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}$ }]

Out[22]=0.384697

Am obținut rezultatul $P_{10000}(95 \le k \le 105) \approx$ 0,384697.

2.15.Exerciții pentru lucrul individual

1. Se aruncă un zar de două ori. Să se calculeze probabilitățile evenimentelor aleatoare: 1) A = {*suma numerelor apărute nu va întrece m*}, 2) B = {*suma numerelor apărute va fi egală cu r*}, 3) G = {*produsul numerelor apărute va fi mai mare ca n*}. Valorile parametrilor m, n şi r sunt date pe variante.

1) m=4, n=14 , r=5; 2) m=5, n=13 , r=4; 3) m=6, n=12 , r=3;
4) m=7, n=11 , r=6; 5) m=8, n=10 , r=4; 6) m=4, n=13 , r=5;
7) m=5, n=12 , r=6; 8) m=6, n=11 , r=3; 9) m=7, n=10 , r=5;
10) m=8, n=14 , r=6; 11) m=4, n=12 , r=4; 12) m=5, n=11 , r=3;
13) m=6, n=10 , r=6; 14) m=7, n=14 , r=4; 15) m=8, n=13 , r=3;
16) m=4, n=12 , r=5; 17) m=5, n=11 , r=4; 18) m=6, n=10 , r=3;
19) m=7, n=14 , r=5; 20) m=8, n=13 , r=6; 21) m=4, n=11 , r=3;
22) m=5, n=10 , r=5; 23) m=6, n=14 , r=6; 24) m=7, n=13 , r=4;
25) m=8, n=12 , r=5; 26) m=4, n=10 , r=6; 27) m=5, n=11 , r=4;
28) m=6, n=12 , r=3; 29) m=7, n=13 , r=6; 30) m=8, n=14 , r=4.

2. Într-un lot care conține n piese de acelaşi tip sunt 8 piese cu careva defect. Se extrag fără revenire 6 piese. Dacă toate piesele extrase sunt calitative, atunci lotul este acceptat, în caz contrar este refuzat. Să se calculeze probabilitatea evenimentului A = {*lotul va fi acceptat*}. Parametrul n este egal cu 100 plus numărul variantei.

3. Un aparat constă din trei elemente care în timpul funcționării lui pot să se deterioreze independent unul de altul. Notăm: A_i = {*elementul i se va deteriora*}, i = 1, 2, 3. Se cunosc probabilitățile acestor evenimente: $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $p_3 = P(A_3)$, valorile cărora sunt date pe variante după enunțul exercițiului. Să se calculeze probabilitățile evenimentelor: A = {*nu se va deteriora nici un element*}, B = {*se va deteriora un singur element*}, C = {*se vor deteriora exact două elemente*}, D = {*se vor deteriora toate elementele*}, E = {*primul element nu se va deteriora*}.

1) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,7; 2) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,7;
3) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,7; 4) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,7;
5) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,7; 6) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,6;
7) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,6; 8) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,6;
9) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,6; 10) p_1=0,4, p_2=0,6, p_3=0,5;
11) p_1=0,7, p_2=0,6, p_3=0,5; 12) p_1=0,8, p_2=0,6, p_3=0,5;
13) p_1=0,9, p_2=0,6, p_3=0,5; 14) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,4;
15) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,4; 16) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,4;
17) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,4; 18) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,5;
19) p_1=0,6, p_2=0,7, p_3=0,5; 20) p_1=0,8, p_2=0,7, p_3=0,5;
21) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,9; 22) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,3;
23) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,6; 24) p_1=0,7, p_2=0,6, p_3=0,5;
25) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,4; 26) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,9;
27) p_1=0,6, p_2=0,7, p_3=0,8; 28) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,5;
29) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,4; 30) p_1=0,5, p_2=0,6, p_3=0,4.

4. Un magazin primeşte pentru vânzare articole cu exterioare identice, fabricate la trei uzine în proporție de: n_1% de la uzina nr.1, n_2% de la uzina nr.2 şi n_3% de la uzina nr.3. Procentele de articole defectate sunt: m_1 pentru uzina nr.1, m_2 pentru uzina nr.2 şi m_3 pentru uzina nr.3. Valorile parametrilor se conțin, pe variante, după enunțul exercițiului. !) Care este probabilitatea ca un articol cumpărat să fie calitativ? 2) **U**n articol luat la întâmplare este defectat. Care este probabilitatea că acest articol a fost fabricat la uzina nr.k.

1) n_1=20, n_2=30, n_3=50, m_1=5, m_2=3, m_3=2, k=1;
2) n_1=10, n_2=40, n_3=50, m_1=3, m_2=2, m_3=5; k=2;
3) n_1=30, n_2=20, n_3=50, m_1=4, m_2=1, m_3=5; k=3;
4) n_1=40, n_2=10, n_3=50, m_1=1, m_2=5, m_3=4; k=1;
5) n_1=10, n_2=50, n_3=40, m_1=2, m_2=4, m_3=4; k=2;
6) n_1=20, n_2=40, n_3=40, m_1=3, m_2=3, m_3=4; k=3;
7) n_1=30, n_2=30, n_3=40, m_1=4, m_2=2, m_3=4; k=1;
8) n_1=40, n_2=20, n_3=40, m_1=5, m_2=1, m_3=4; k=2;
9) n_1=50, n_2=10, n_3=40, m_1=1, m_2=6, m_3=3; k=3;

10) n_1=10, n_2=60, n_3=30, m_1=2, m_2=5, m_3=3; k=1;
11) n_1=20, n_2=50, n_3=30, m_1=3, m_2=4, m_3=3; k=2;
12) n_1=30, n_2=40, n_3=30, m_1=4, m_2=3, m_3=3; k=3;
13) n_1=40, n_2=30, n_3=30, m_1=5, m_2=2, m_3=3; k=1;
14) n_1=50, n_2=20, n_3=30, m_1=6, m_2=1, m_3=3; k=2;
15) n_1=60, n_2=10, n_3=30, m_1=1, m_2=7, m_3=2; k=3;
16) n_1=10, n_2=70, n_3=20, m_1=2, m_2=6, m_3=2; k=1;
17) n_1=20, n_2=60, n_3=20, m_1=3, m_2=5, m_3=2; k=2;
18) n_1=30, n_2=50, n_3=20, m_1=4, m_2=4, m_3=2; k=3;
19) n_1=40, n_2=40, n_3=20, m_1=5, m_2=3, m_3=2; k=1;
20) n_1=50, n_2=30, n_3=20, m_1=6, m_2=2, m_3=2; k=2;
21) n_1=10, n_2=40, n_3=50, m_1=7, m_2=5, m_3=4; k=3;
22) n_1=20, n_2=60, n_3=20, m_1=6, m_2=3, m_3=7; k=1;
23) n_1=30, n_2=20, n_3=50, m_1=4, m_2=5, m_3=6; k=2;
24) n_1=40, n_2=20, n_3=40, m_1=5, m_2=7, m_3=6; k=3;
25) n_1=40, n_2=30, n_3=30, m_1=5, m_2=4, m_3=6; k=1;
26) n_1=40, n_2=10, n_3=50, m_1=3, m_2=8, m_3=4; k=2;
27) n_1=50, n_2=30, n_3=20, m_1=3, m_2=4, m_3=5; k=3;
28) n_1=20, n_2=50, n_3=30, m_1=5, m_2=6, m_3=4; k=1;
29) n_1=30, n_2=20, n_3=50, m_1=7, m_2=5, m_3=6; k=2;
30) n_1=40, n_2=50, n_3=10, m_1=5, m_2=6, m_3=8, k=3.

5. O monedă se aruncă de n ori. Să se calculeze probabilitățile evenimentelor: A = {*stema va apare de k ori*}, B = {*stema va apare nu mai mult de 2 ori*}, C = {*stema nu va apare niciodată*}. Numărul n este egal cu 25 plus numărul variantei, iar k este egal cu 10 plus numărul variantei.

6. Probabilitatea ca un aparat electric să se defecteze în perioada de garanție este p=0,12. Să se calculeze probabilitatea ca din 1000 aparate cumpărate, în perioada de garanție, *se vor defecta exact m aparate*. Numărul m coincide cu numărul variantei adunat cu 100.

7. Într-o urnă sunt n bile de trei culori: n_1 bile albe, n_2 bile negre şi n_3 bile albastre. Se extrag succesiv cu revenire m bile. Să se calculeze probabilitățile evenimentelor: A = {*toate bilele extrase vor fi albe*}, B = {*m_1 bile vor fi albe, m_2 vor fi negre şi m_3 vor fi albastre*}, C = {*m_1 bile vor fi albe iar restul vor fi de alte culori*}.

1) n=15, n_1=4 n_2=5, n_3=6, m=10, m_1=2, m_2=3, m_3=5;
2) n=15, n_1=3, n_2=6, n_3=6, m=10, m_1= 2, m_2=4, m_3=4;

3) n=15, n_1=5, n_2=4, n_3=6, m=10, m_1=3, m_2=2, m_3=5
4) n=15, n_1=6, n_2=5, n_3=4, m=10, m_1=5, m_2=3, m_3=2;
5) n=15, n_1=4, n_2=6, n_3=5, m=10, m_1=2, m_2=4, m_3=4;
6) n=15, n_1=3, n_2=5, n_3=7, m=9, m_1=1, m_2=3, m_3=5;
7) n=15, n_1=5, n_2=6, n_3=4, m=9, m_1=2, m_2=5, m_3=2;
8) n=15, n_1=6, n_2=4, n_3=5, m=9, m_1=3, m_2=2, m_3=4;
9) n=15, n_1=7, n_2=4, n_3=4, m=9, m_1=5, m_2=3, m_3=1;
10) n=15, n_1=7, n_2=3, n_3=5, m=9, m_1=4, m_2=2, m_3=3;
11) n=18, n_1=4, n_2=6, n_3=8, m=10, m_1=2, m_2=3, m_3=5;
12) n=18, n_1=5, n_2=5, n_3=8, m=10, m_1=4, m_2=1, m_3=5;
13) n=18, n_1=4, n_2=8, n_3=6, m=10, m_1=2, m_2=4, m_3=4;
14) n=18, n_1=5, n_2=8, n_3=5, m=10, m_1=3, m_2=5, m_3=2;
15) n=18, n_1=5, n_2=6, n_3=7, m=10, m_1=3, m_2=4, m_3=3;
16) n=16, n_1=5, n_2=7, n_3=6, m=9, m_1=3, m_2=3, m_3=3;
17) n=18, n_1=6, n_2=5, n_3=7, m=9, m_1=3, m_2=2, m_3=4;
18) n=18, n_1=6, n_2=7, n_3=5, m=9, m_1=4, m_2=4, m_3=1;
19) n=18, n_1=6, n_2=8, n_3=4, m=9, m_1=4, m_2=3, m_3=2;
20) n=18, n_1=6, n_2=4, n_3=8, m=9, m_1=3, m_2=2, m_3=5;
21) n=16, n_1=5, n_2=5, n_3=6, m=8, m_1=2, m_2=3, m_3=3;
22) n=16, n_1=5, n_2=6, n_3=5, m=8, m_1=3, m_2=2, m_3=3;
23) n=16, n_1=5, n_2=7, n_3=4, m=8, m_1=3, m_2=4, m_3=1;
24) n=16, n_1=5, n_2=4, n_3=7, m=8, m_1=3, m_2=2, m_3=3;
25) n=16, n_1=6, n_2=5, n_3=5, m=8, m_1=4, m_2=3, m_3=1;
26) n=16, n_1=6, n_2=4, n_3=6, m=9, m_1=3, m_2=3, m_3=3;
27) n=16, n_1=6, n_2=6, n_3=4, m=9, m_1=2, m_2=4, m_3=2;
28) n=16, n_1=7, n_2=4, n_3=5, m=9, m_1=4, m_2=2, m_3=3;
29) n=16, n_1=7, n_2=5, n_3=4, m=9, m_1=5, m_2=2, m_3=2;
30) n=16, n_1=4, n_2=5, n_3=7, m=9, m_1=2, m_2=3, m_3=4.

8. Să se calculeze probabilitățile evenimentelor A, B şi C din exercițiul 7 cu condiția că bilele extrase nu revin în urnă.

9. 1) Care este probabilitatea că numărul *3* va apărea pentru prima dată la a m-a aruncare a zarului? 2) Care este probabilitatea că la primele m aruncări ale zarului numărul *3* nu va apărea? Numărul m este numărul variantei adunat cu *4*.

10. Probabilitatea unui eveniment A într-o experiență aleatoare este p: $p = P(A)$. 1) Să se calculeze probabilitatea ca în decursul a 1000 repetări a acestei experiențe evenimentul A se va realiza de k ori (să se folosească formula care rezultă din teorema locală Moivre-Laplace şi formula care rezultă din teorema Poisson). 2) Să se calculeze probabilitatea că numărul de realizări ale evenimentului A să fie cuprins între k_1 şi k_2.

1) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=13, 2) p=0,009, k=10, k_1=6, k_2=14,
3) p=0,011, k=11, k_1=7, k_2=15, 4) p=0,011 k=9, k_1=7, k_2=15,
5) p=0,012, k=10, k_1=8, k_2=16, 6) p=0,008, k=10, k_1=7, k_2=13,
7) p=0,009, k=11, k_1=8, k_2=14, 8) p=0,01, k=12, k_1=9, k_2=15,
9) p=0,011, k=10, k_1=9, k_2=14, 10) p=0,012, k=11, k_1=10, k_2=15,
11) p=0,008, k=11, k_1=6, k_2=13, 12) p=0,009, k=12, k_1=7, k_2=13,
13) p=0,01, k=13, k_1=8, k_2=15, 14) p=0,011, k=11, k_1=9, k_2=14,
15) p=0,012, k=13, k_1=10, k_2=15, 16) p=0,008, k=7, k_1=5, k_2=10,
17) p=0,009, k=8, k_1=6, k_2=16, 18) p=0,01, k=9, k_1=7, k_2=17,
19) p=0,011, k=10, k_1=6, k_2=17, 20) p=0,012, k=11, k_1=8, k_2=18,
21) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=15, 22) p=0,009, k=10, k_1=6, k_2=15,
23) p=0,01, k=9, k_1=4, k_2=14, 24) p=0,011, k=10, k_1=6, k_2=17,
25) p=0,012, k=11, k_1=5, k_2=14, 26) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=15,
27) p=0,009, k=8, k_1=4, k_2=14, 28) p=0,01, k=9, k_1=7, k_2=17,
29) p=0,011, k=12, k_1=8, k_2=18, 30) p=0,012, k=11, k_1=6, k_2=17.

3. VARIABILE ALEATOARE

3.1. Introducere

În acest capitol se conține o expunere succintă a rezultatelor din Teoria probabilităților ce se referă la **variabile aleatoare,** exemple de probleme rezolvate la această temă, dar şi o listă de probleme propuse spre rezolvare.

Vizavi de Sistemul Mathematica, vom aplica, în afară de funcțiile definite anterior, şi funcțiile **Condition** (notată şi cu /;), **Clear.**

F[x_]:=0/;x<0;F[x_]:=1/;x≥0; înseamnă că funcției $F(x)$ i se atrubuie valoarea 0 cu condiția că x<0 şi valoarea 1 cu condiția că x≥0;

Clear[F,f,m,…] înseamnă că funcțiile sau parametrii F, f, m,... se eliberează (se curăță) de valorile atribuite lor anterior.

În Sistemul Mathematica sunt încorporate pachete de programe specializate în rezolvarea problemelor din diferite domenii ale Matematicii. În acest Capitol se va folosi pachetul **Statistics`NormalDistribution`**. Când lucrăm cu un document în

Sistemul Mathematica, acest pachet poate fi instalat cu ajutorul instrucțiunii

<<Statistics`NormalDistribution`.

Dacă se doreşte trasarea graficului funcției $f(x)$ definită pe segmentul [a,b] prin intermediul unei linii de grosime standard, atunci se poate folosi funcția

Plot[f,{x,a,b}]

Atunci, când se doreşte trasarea graficului funcției $f(x)$ definite pe segmentul [a,b] prin intermediul unei linii de o anumită grosime, se poate folosi funcția **Plot[f,{x,a,b},PlotStyle→Hue[k]],** unde k este raportul dintre grosimea dorită a graficului şi grosimea standard.

Când dorim să construim, pe un singur desen, graficele mai multor fincții f_1, f_2, ... definite pe segmentul [a,b], atunci putem folosi funcția **Plot[{f₁,f₂,…,},{x,a,b}].** Dacă vrem să construim pe un singur desen graficele fincțiilor f_1, f_2, ... definite pe segmentul [a,b], folosind linii de diferite grosimi şi culori, atunci putem utiliza funcția

Plot[{f₁,f₂,…},{x,a,b},PlotStyle→{Hue[k₁],Hue[k₂],…}].

3.2. Noțiune de variabilă aleatoare. Funcția de repartiție

3.2.1. Definiția variabilei aleatoare (v.a)

În majoritatea cazurilor rezultatele înregistrate într-un experiment aleator reprezintă nişte valori numerice ale unei mărimi care depind de evenimentele elementare în acest experiment. Această marime se va numi variabilă aleatoare. Aceasta este, ca atare, o variabilă (o funcție) care depinde de rezultatul posibil într-un experiment aleator (ce posedă Proprietatea Regularitățtii Statistice), ceea ce înseamnă că valoarea ei nu poate fi anticipată cu certitudine înainte de efectuarea experimentului. Vom da definiția matematică a variabilei aleatoare.

Definiție. Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ un câmp de probabilitate, atunci vom numi *variabilă aleatoare (v.a.)* definită pe acest câmp orice funcție $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ care verifică condiția

$$\{\, \omega\in\Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{F} \text{ pentru orice } x\in\mathbf{R} . \qquad (3.1)$$

Observație. Dacă suntem în cazul discret, i.e., în cazul când spațiul de evenimente elementare Ω este o mulțime finită sau, cel mult, numărabilă, atunci câmpul (familia) de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ coin-cide cu familia tuturor submulțimilor din Ω. Prin urmare, în acest caz, putem numi variabilă aleatoare orice functie $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$, deoarece în caz discret condiția că $\{ \omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{F}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc automat.

Evenimentul care figurează în condiția (3.1) se notează, pe scurt, astfel: $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$, sau $\{\xi < x\}$, sau $(\xi < x)$. Mărimea $\xi(\omega)$ se numeşte valoare a variabilei aleatoare ξ. Din condiția (3.1) rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ putem găsi probabilitatea evenimentului aleator $(\xi < x)$.

În calitate de exemple de v.a. întâlnite în practică putem lua: suma de puncte apărute la aruncarea unui zar de două ori, durata funcționării unui dispozitiv electronic, numărul de particule alfa emise de o substanță radioactivă într-o unitate de timp, cantitatea anuală de precipitații atmosferice într-o anumită regiune, numărul de apeluri telefonice înregistrate pe parcursul a 24 de ore la o statie de ajutor medical, numărul de accidente auto înregistrate pe parcursul unui anumit interval de timp etc., etc.

3.2.2. Proprietăți ale variabilei aleatoare

a) Dacă ξ este o variabilă aleatoare, atunci pentru orice $a \in \mathbf{R}$ şi $b \in \mathbf{R}$ sunt evenimente aleatoare şi, prin urmare, sunt definite probabilitățile lor pentru $\{\xi > a\}$, $\{\xi \geq a\}$, $\{\xi = a\}$, $\{a \leq \xi < b\}$, $\{b < \xi \leq a\}$, etc.

b) Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate, $a \in \mathbf{R}$, $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ şi $\eta : \Omega \to \mathbf{R}$ sunt variabile aleatoare. Atunci sunt variabile aleatoare şi funcțiile: 1) $a\xi$; 2) ξ^k, $k = 1, 2, ...$; 3) $\xi - \eta$; 4) $\xi + \eta$; 5) $\xi \cdot \eta$; 6) $1/\eta$ dacă $\eta(\omega) \neq 0$, $\forall \omega \in \Omega$; 7) ξ/η dacă $\eta(\omega) \neq 0$, $\forall \omega \in \Omega$; 8) $\xi \pm a$.

În genere, dacă avem un şir finit de v.a. definite pe unul şi acelaşi câmp de probabilitate, atunci v.a. va fi şi orice funcție de aceste variabile, în caz că aceasta este funcție continuă. De exemplu, suma de v.a., diferența lor, produsul lor, minimumul sau maximumul de aceste variabile etc., vor fi v.a.

3.2.3. Funcția de repartiție (distribuție) a variabilei aleatoare

Definiție. Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ un câmp de probabilitate şi $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ o variabilă aleatoare. Funcția $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin relația

$$F(x) = P(\xi < x), \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}, \tag{3.2}$$

se numeşte *funcție de repartiție* (f.r.) a v.a. ξ.

Teoremă (*Proprietățile caracteristice ale f.r.*)

Dacă F(x) este o f.r. a unei v.a., atunci au loc următoarele proprietăți:

1) F(x) este monoton nedescrescătoare), i.e., $F(x_1) \leq F(x_2)$ *de îndată ce* $x_1 \leq x_2$ *;*

2) F(x) este continuă la stânga pentru orice $x \in \mathbf{R}$*, i.e., pentru orice şir monoton crescător de valori* x_n *care tinde la x, atunci când n tinde la* $+\infty$*, şirul corespunzător de valori* $F(x_n)$ *are drept limită valoarea F(x), fapt ce se notează, pe scurt, F(x-0)=F(x);*

3) $F(+\infty) = 1$ *şi* $F(-\infty)=0$ *.*

Observaţie. Proprietăţile 1)-3) sunt caracteristice numai şi numai funcţiilor de repartiţie în sensul că, are loc şi reciproca acestei teoreme, conform căreia: ***pentru orice funcţie*** *F* **:** $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ***ce posedă proprietăţile 1)-3) putem construi (neunivoc) un câmp de probabilitate*** *(*Ω*,* $\mathcal{F}$ *,* ***P) şi o v.a.*** ξ ***definită pe el, astfel încât funcţtia ei de repartiţtie coincide cu*** *F*.

Propoziţie. (***Formule de calcul ale probabilităţilor pe baza f.r.***) *Fie* ξ *o v.a. cu f.r. F(x). Atunci pentru orice* $a \leq b$, $a,b \in \mathbf{R}$*, au loc următoarele formule:*

a) $\mathbf{P}(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$;

b) $\mathbf{P}(\xi \geq a) = 1 - F(a)$;

c) $\mathbf{P}(\xi = a) = F(a+0) - F(a)$, *prin F(a+0) fiind notată* ***limita la dreapta*** *a funcţiei F în punctul a;*

d) $\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) = F(b+a) - F(a)$;

e) $\mathbf{P}(a < \xi < b) = F(b) - F(a+0)$;

f) $\mathbf{P}(a < \xi \leq b) = F(b+0) - F(a+0)$.

Observaţie. Din formula *c)* rezultă că pentru acele v.a. a caror f.r. este continuă, $\mathbf{P}(\xi = a) = 0$ pentru orice numar real *a,* deoarece în acest caz $F(a+0) = F(a)$.

3.2.4. Exemple

Exemplul 1. Considerăm v.a. ξ cu f.r. dată de formula:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

1) Să se definească această funcţie de repartiţie în Sistemul Mathematica.

2) Să se construiască graficul funcţiei $F(x)$.

3) Să se calculeze probabilitatea evenimentului $(0 \leq \xi < 1)$.

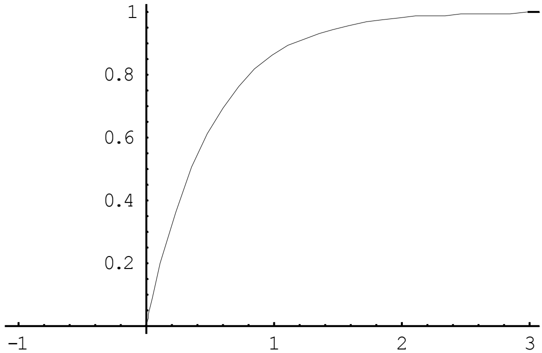
4) Să se calculeze probabilitatea evenimentului $(\xi \geq 2)$.

Rezolvare. 1) Definim funcţia $F(x)$ în Sistemul Mathematica cu ajutorul operatorului **Condition**, notat şi cu **/;**.

In[1]:=F[x_]:=0/;x≤0;F[x_]:=1−Exp[−2*x]/;x>0;

2) Pentru construcția graficului funcției F(x) folosim fincția **Plot**.

In[2]:=Plot[F[x],{x,−1,5}]



Out[2]=Graphics

3) Aplicăm formula *a)* din Propoziție.

In[3]:=N[F[1]−F[0]]

Out[3]=0.86465

Am obținut $P(0\le\xi<1)=0{,}86465$.

4) Pentru calculul probabilităţi folosim formula *b)* din Propoziție.

In[4]:=N[1−F[2]]

Out[4]=0.0183156

Am obținut $P(\xi\ge 2) = 0{,}0183156$.

Rezolvarea problemei s-a terminat, dar, deoarece la rezolvarea problemei următoare se va folosi, din nou, notația *F(x)*, curățim conținutul ei, ce corespunde problemei rezolvate mai sus, apelând la operatorul **Clear**.

In[5]:=Clear[F].

3.3. Variabile aleatoare de tip discret şi caracteristicile numerice ale acestora

În Teoria Probabilităților sunt studiate 3 tipuri de v.a.: discrete, (absolut) continue şi singulare. Interesante din punct de vedere ale aplicațiilor fiind doar primele două.

3.3.1. Definiția variabilei aleatoare de tip discret

Fie (Ω, $\mathscr{F}$, ***P***) un câmp de probabilitate şi $\xi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ o v.a.

Definiție. Variabila ξ se numeşte *variabilă aleatoare de tip discret* dacă mulțimea valorilor posibile ale acesteia este finită sau infinită, cel mult numărabilă.

Drept exemple de v.a. de tip discret putem lua numarul de steme apărute la aruncarea unei monede de n ori, numărul de puncte apărute la aruncarea unui zar o singură dată, numărul de apeluri telefonice inregistrate la Urgența Medicală pe parcursul a 24 de ore, numărul de erori descoperite în urma compilării unui soft etc.,etc.

3.3.2. Repartiția (distribuția) probabilistă a variabilei aleatoare de tip discret

Fie ξ o v.a. de tip discret definită pe câmpul de probabilitate (Ω, $\mathscr{F}$, ***P***), adică aceasta ia, în calitate de valori posibile, valori din mulțimea $\mathscr{X}=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$, unde $x_1<x_2<...<x_n<...$. După cum am văzut, indiferent de tipul v.a., aceasta poate fi definită şi prin intermediul funcției ei de repartiție $F(x)$, dar în caz discret mai există o modalitate echivalentă de a defini v.a. şi anume, cu ajutorul noțiunii de repartiție a v.a.

Definiție. Vom numi ***repartiție probabilistă*** *(simplu, repartiție)* a v.a. ξ setul de perechi ordonate $\{(x_i,p_i)\}_{i\geq 1}$ sau tabloul de forma

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_n & ... \end{pmatrix},$$

unde $p_i = P(\xi = x_i) \geq 0$, $i \geq 1$, $\Sigma_{i\geq 1}\, p_i = 1$. (3.3)

Următoarea afirmație arată că, în caz discret, ***f.r. şi repartiția v.a.*** ξ ***sunt două forme echivalente de modelare matematică (probabilistă) a ei***.

Propoziție. *F.r. şi repartiția unei v.a. ξ de tip discret sunt legate între ele conform următoarelor formule:*

a) $F(x) = \sum_{x_j<x} p_j$; (3.4)

b) mulțimea de valori posibile a v.a. ξ este dată de
$\mathscr{X}=\{x_1,x_2,...,x_n,...\} = \{x \in \mathbf{R} : F(x+0)-F(x)>0\}$ *iar probabilitățile*
$p_i = P(\xi = x_i) = F(x+0)-F(x),\ i \geq 1.$ (3.5)

Concluzie. Din această propoziție rezultă că f.r. şi repartiția unei v.a. de tip discret sunt *două forme echivalente de modelare probabilistă ce* *descriu legea care guvernează comportamentul probabilist al v.a.*. Mai mult, o v.a. de tip discret este definită dacă se cunoaşte legea ei de repartiție: sau sub formă de funcție de repartiție, sau sub formă de repartiție.

3.3.3. Caracteristice numerice ale variabilei aleatoare de tip discret

Cunoaşterea legității de repartiție (f.r. sau repartiția) a unei v. a. o putem considera o cunoaştere exaustivă (completă) a acesteia din punct de vedere al comportamentului ei probabilist. Însă, uneori, în dependență de scopul urmărit, este de ajuns să cunoaştem doar careva valori numerice ce caracterizează sumar v.a. dată. Astfel de valori se numesc *caracteristici numerice*.

Printre caracteristicile numerice care joacă rolul de *parametri de poziție sau parametri ai tendinței centrale se enumără valoarea medie şi modul(moda).*

1) Valoarea medie.

Definiție. Vom numi ***valoare medie*** a unei v.a. discrete ξ date de repartiția (3.3) numărul

$$M\xi = \Sigma_{i\geq 1} x_i p_i\ . \tag{3.6}$$

Observație. În cazul când mulțimea de valori posibile a v.a. este finită, suma din partea dreaptă a formulei (3.6) este o sumă finită. Dar dacă mulțimea de valori posibile a v.a. este infinit numărabilă, atunci vom spune ca ***valoarea medie*** $M\xi$ ***există dacă seria numerică*** $\Sigma_{i\geq 1} x_i p_i$ ***converge absolut****, adica* $\Sigma_{i\geq 1} |x_i| p_i < +\infty$.

Valoarea medie a v.a. $M\xi$ a variabilei aleatoare ξ se mai notează m_ξ sau $E\xi$.

Dacă numărul de experimente repetate în care sunt vizate valorile v.a. ξ este destul de mare, atunci media aritmetică a valorilor observate este aproximativ egală cu valoarea ei medie. În aceasta constă sensul valorii medii.

Propozitia 1. (***Proprietățile valorii medii***). *Valoarea medie posedă următoarele proprietăți:*

1. *Daca v.a.* ξ *ia valori nenegative cu probabilitatea* 1, *atunci* $M\xi\geq 0$ *şi* $M\xi=0$ *dacă şi numai dacă v.a.* ξ *ia vloarea 0 cu probabilitatea* 1;

2. *Dacă există valorile medii ale v.a.* ξ *,* η*, atunci există şi valoarea medie a v.a.* $a\xi+\beta\eta$ *si* $\boldsymbol{M}(a\xi+\beta\eta)= a\boldsymbol{M}\xi+ b\boldsymbol{M}\eta$ *pentru orice numere reale a şi b;*
3. *Dacă există valoarea medie a v.a.* ξ *, atuni* $/\boldsymbol{M}\xi/\leq \boldsymbol{M}/\xi/$*;*
4. *Daca există valorile medii ale v.a.* ξ *,* η *şi aceste v.a. sunt independente în sensul ca* $\boldsymbol{P}(\xi=x, \eta=y)$*, pentru orice x şi y din mulțimile de valori posibile ale v.a. respective, atunci există şi valoarea medie a produsului* $\xi\cdot\eta$ *si* $\boldsymbol{M}\xi\cdot\eta=\boldsymbol{M}\xi\cdot\boldsymbol{M}\eta$*.*

Următoarea propozitie ne arată cum poate fi calculată valoarea medie a unei functii de v.a.d. ξ atunci când se cunoaşte doar repartiția lui ξ.

Propozitie (*Formula de transport*). *Daca v.a.d.* ξ *este dată de repartiția* (3.3) şi *f(x) este o funcție continuă definită pe mulțimea numerelor reale, astfel incât v.a.* $\eta=f(\xi)$ *posedă valoare medie, atunci* $\boldsymbol{M}\eta=\boldsymbol{M}f(\xi)=\Sigma_{\iota\geq 1} f(x_i)p_i$.

2) Modul. Se numeşte *mod* (modă) a unei v.a. de tip discret acea valoare posibilă a acesteia, căreia îi corespunde probabilitatea maximă.

Modul variabilei aleatoare ξ se notează cu *Mo*[ξ]. Din definiția modulului rezultă că

$$Mo[\xi] = x_{j_0}\text{, unde } p_{j_0} = \max_{1\leq j\leq n}\{p_j\}\,. \tag{3.7}$$

3) Variabile aleatoare centrate. Dispersia (varianța). Abaterea medie pătratică. Fie ξ o variabilă aleatoare cu valoarea medie m_ξ. Expresia

$$\xi^o = \xi - m_\xi \tag{3.8}$$

se numeşte *variabilă aleatoare centrată*. Valoarea medie a variabilei aleatoare centrate este nulă.

Definiția 1. Se numeşte *dispersie (varianță)* a variabilei aleatoare ξ valoarea medie a pătratului variabilei aleatoare centrate ξ^o. Dispersia variabilei aleatoare ξ se notează cu $D\xi$, sau D_ξ, sau Varξ. Din definiția dispersiei rezultă că

$$D\xi = M(\xi^o)^2 = M(\xi - m_\xi)^2. \tag{3.9}$$

Formula de calcul a dispersiei variabilei aleatoare de tip discret este:

$$D\xi = \sum\nolimits_{j=1}^{n}(x_j - m_\xi)^2 p_j\,. \tag{3.10}$$

In caz general,

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 \qquad (3.11)$$

Rațiunea introducerii noțiunii de dispersie rezidă în faptul că aceasta caracterizează *gradul de dispersare (împrăştiere)* a valorilor posibile ale unei v. a. în raport cu valoarea ei medie. Mai exact, cu cât dispersia este mai mică cu atât această împrăştiere este mai mică şi invers.

Definiția 2. Se numeşte *abatere medie pătratică sau abatere standard* a unei v.a. rădăcina pătrată din dispersia ei. Abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare ξ se notează cu $\sigma[\xi]$ sau σ_ξ. Din definiție rezultă că

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi}\,. \qquad (3.12)$$

Observatie. În aplicații, pentru a caracteriza gradul de imprăstiere a valorilor v.a. cercetate în raport cu valoarea ei medie, este mai usor să operăm cu abaterea medie pătratică, deoarece aceasta se exprimă în aceleaşi unități de masură ca şi v.a. şi valoarea ei medie.

Propozitia 2. (***Proprietățile dispersiei***). *Dispersia posedă următoarele proprietăți:*

1. *Dacă dispersia v.a. ξ există, , atunci $\boldsymbol{D}\xi \geq 0$ şi $\boldsymbol{D}\xi = 0$ dacă şi numai dacă v.a. ξ ia valoarea $\boldsymbol{M}\xi$ cu probabilitatea* 1;
2. *Dacă există dispersia v.a. ξ, atunci există şi dispersia v.a. $a\xi+b$ si $\boldsymbol{D}(a\xi+b)= a^2\, \boldsymbol{D}\xi$ pentru orice numere reale a şi b;*
3. *Dacă există dispersiile v.a. ξ , η, atunci există şi dispersia v.a. $\xi+\eta$ si $\boldsymbol{D}(\xi\pm\eta)= \boldsymbol{M}\xi+\boldsymbol{M}\eta\pm 2\boldsymbol{M}(\xi-\boldsymbol{M}\xi)(\eta-\boldsymbol{M}\eta)$;*
4. *Dacă există dispersiile v.a. ξ , η şi aceste v.a. sunt independente în sensul ca $\boldsymbol{P}(\xi =a,\ \eta=b)$, pentru orice a şi b din mulțimile de valori posibile ale v.a. respective, atunci există şi dispersia v.a. $\xi+\eta$ şi $\boldsymbol{D}(\xi + \eta)=\boldsymbol{D}\xi + \boldsymbol{D}\eta$.*

Definiție. Se numeste *covarianță* a v.a. ξ,η numarul $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\boldsymbol{M}(\xi-\boldsymbol{M}\xi)(\eta-\boldsymbol{M}\eta)$.

Observație. Proprietățile 3 şi 4 ale dispersiei arată că $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$, atunci când v.a. ξ,η sunt independente.

4) Momente inițiale.

Definiție. Se numeşte *moment inițial de ordinul s* al unei v.a. valoarea medie a acestei v.a. luată la puterea *s.* Momentul inițial de ordinul *s* al v.a. ξ se notează cu $\alpha_s[\xi]$. Din definiția momentelor inițiale rezultă că:

$$\alpha_s[\xi] = M\xi^s,\ s = 1, 2,... \qquad (3.13)$$

iar *formula de calcul a momentului inițial de ordinul s al unei v.a.de tip discret* este

$$\alpha_s[\xi] = \sum\nolimits_{j\geq 1} x_j^s p_j, \text{s} = 1, 2, ... \qquad (3.14)$$

Observăm că valoarea medie coincide cu momentul inițial de ordinul întâi.

5) Momente centrate.

Definiție. Se numeşte *moment centrat* (sau *central*) *de ordinul s* al unei v.a. valoarea medie a puterii *s* a variabilei centrate respective. Momentul centrat de ordinul *s* al v.a. ξ se notează cu $\mu_s[\xi]$. Din definiție rezultă că

$$\mu_s[\xi] = M(\xi^o)^s, \text{ s} = 1, 2, ... \qquad (3.15)$$

Formula de calcul a momentului centrat de ordinul s al unei v.a.de tip discret are forma

$$\mu_s[\xi] = \sum\nolimits_{j\geq 1} (x_j - m_\xi)^s p_j \text{ , } s = 1, 2, ... \qquad (3.16)$$

Au loc egalitățile $\mu_1[\xi] = 0$, $\mu_2[\xi] = D\xi$.

Relațiile duntre momentele centrate şi cele inițiale sunt:

1) $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$;

2) $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$;

3) $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$.

5) Asimetria.

Definiție. Se numeşte *asimetrie* (*coeficient de asimetrie*) al v.a. ξ numărul notat cu S_k şi dat de egalitatea

$$S_k[\xi] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad . \qquad (3.17)$$

6) Excesul.

Definiție. Se numeşte *exces* al v.a. ξ numărul notat cu ε sau $Ex[\xi]$ şi definit prin egalitatea

$$Ex[\xi] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \,. \qquad (3.18)$$

3.3.4. Exemple de determinare a funcției de repartiție şi de calcul al valorilor caracteristice ale unei v.a.de tip discret

Exemplul 2. Se dă v.a.de tip discret cu repartiția

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}. \qquad (3.19)$$

Se cere: 1) să se definească (să se introducă) în Sistemul Mathematica v.a. ξ; 2) să se determine funcția ei de repartiție $F(x)$; 3) să se introducă funcția de repartiție în Sistemul Mathematica; 4) să se construiască graficul funcției $F(x)$; 5) să se calculeze probabilitatea ca v.a. ξ va lua valori din intervalul [3, 8).

Rezolvare. 1) Introducem repartiția v.a. ξ sub formă de listă cu două linii, elementele căreia sunt elementele liniilor matricei (3.19).

In[6]:=p={{0,2,5,7},{0.3,0.4,0.1,0.2}}

Scriem **p** în forma matriceală cu ajutorul funcției **MatrixForm**.

In[7]:=MatrixForm[p]

Out[7]= $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

2)Aplicând formula (3.4), găsim funcția de repartiție

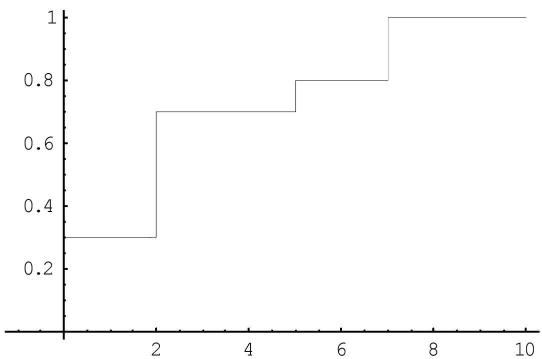
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}3, & 0 < x \le 2, \\ 0{,}7, & 2 < x \le 5, \\ 0{,}8, & 5 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

3) Introducem funcția F(x) în Sistemul Mathematica cu ajutorul funcției **Condition**, notată şi cu /;.

In[8]:=F[x_]:=0/;x≤0;F[x_]:=0.3/;0<x≤2;F[x_]:=0.7/;2<x≤5;F[x_]:=0.8/;5<x≤7;F[x_]:=1/;7<x;

4) Construim graficul funcției de repartiție cu ajutorul funcției **Plot**.

In[9]:=Plot[F[x],{x,–1,8}]



Out[9]=Graphics;

5) Folosim formula *a)* din Propoziție, vezi punctul 3.2.3 al acestui capitol:

In[10]:=P(3≤ξ<8)=F[8]−F[3]

Out[10]=0.3

Rezolvarea exercițiului s-a terminat. Cum funcția de repartiție $F(x)$ din acest exercițiu nu se foloseşte în exercițiile ce urmează, dar notația se foloseşte, trebuie să scoatem definiția ei din Sistem. Matricea **p** mai rămâne în Sistem, deoarece ea se va folosi la rezolvarea exercițiului următor. **In[10]:=Clear[F].**

Exercițiul 3. Fiind dată aceeaşi v.a. ξ cu repartiția (3.19), să se calculeze: 1) valoarea medie; 2) dispersia; 3) abaterea medie pătratică; 4) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 5) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 6) asimetria; 7) excesul.

Rezolvare. 1) Calculăm valoarea medie cu ajutorul formulei (3.6).

In[11]:= $m_\xi = \sum_{j=1}^{4} p[[1,j]]p[[2,j]]$

Out[11]=2.7

Am obținut m_ξ=2,7. Aici **p[i,j]** este notația elementului p_{ij} al matricei **p**.

2) Determinăm dispersia conform formulei (3.12).

In[12]:= $D\xi = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]]-m_\xi)\text{^}2)p[[2,j]]$

Out[12]=6.61

Am obținut $D\xi$=6,61.

3) Aplicăm formula (3.13).

In[13]:= $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Out[13]=2.57099

Am obținut σ_ξ=2,57099.

4) Pentru calculul momentelor inițiale folosim formulele (3.14).

In[14]:= $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}1)p[[2,j]]$

Out[14]=2.7

In[15]:= $\alpha_2 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}2)p[[2,j]]$

Out[15]=13.9

In[16]:=$\alpha_3 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}3)p[[2,j]]$

Out[16]=84.3

In[17]:=$\alpha_4 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}4)p[[2,j]]$

Out[17]=549.1

Am obținut α_1=2,7; α_2=13,9; α_3=84,3; α_4=549,1.

5) Calculăm momentele centrate conform formulelor (3.16).

In[18]:= $\mu_1 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\text{^}1)p[[2,j]]$

Out[18]=–1.11022×10^{-16}

Se ştie că $\mu_1 = 0$. Aici am obținut un număr foarte aproape, dar totuşi diferit de zero. Aceasta se întâmplă uneori când se operează cu numere aproximative. După rotunjire se obține aceeaşi valoare 0.

In[19]:= $\mu_2 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\text{^}2)p[[2,j]]$

Out[19]=6.61

In[20]:= $\mu_3 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\text{^}3)p[[2,j]]$

Out[20]=11.076

In[21]:= $\mu_4 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_\xi)\text{^}4)p[[2,j]]$

Out[21]=87.2137

Am obținut μ_1=0; μ_2=6,61; μ_3=11;076, μ_4=87,2137.

6) Calculăm asimetria conform formulei (3.17).

In[22]:=Sk[ξ]=μ_3/σ^3

Out[22]=0.65175

7) Calculăm excesul conform formulei (3.18).

In[22]:=Ex[ξ]=$\mu_4/\sigma^4 - 3$

Out[22]=–1.0039

Rezolvarea exercițiului s-a terminat. Eliberăm parametrii de valorile atribuite în acest exercițiu.

In[23]:=Clear[p,m_ξ**,**D_ξ**,**σ_ξ**,**α_1**,**α_2**,**α_4**,** μ_1**,**μ_2**,**μ_3**,**μ_4**,Sk[ξ],Ex[ξ]].**

3.4. Repartiții (modele probabiliste) uzuale (clasice) în caz discret

3.4.1. Funcția generatoare a variabilei aleatoare

În caz discret este comod uneori ca probabilitățile sau caracteristicile numerice ale unei v.a. ce poate lua valori din multimea numerelor naturale, inclusiv 0, să fie calculate cu ajutorul unei funcții numite *funcție generatoare* .

Fie că variabila aleatoare ξ are repartiția

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & k & ... \\ p_0 & p_1 & p_2 & ... & p_k & ... \end{pmatrix} \qquad (3.20)$$

Definiție. Se numeşte *funcție generatoare* a v.a. (20) funcția $\varphi(z)$ definită prin egalitatea

$$\varphi(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} p_k z^k , \qquad (3.21)$$

unde z este un parametru, care ia valori din intervalul (0;1].

În cazul când v.a. ξ ia valori dintr-o mulțime finită de valori, atunci în expresia (3.21) coeficienții p_k, începând cu un anume indice, sunt egali cu zero. Se demonstrează că

$$\alpha_1[\xi] = M\xi = \varphi'(1). \qquad (3.22)$$

$$\alpha_2[\xi] = \varphi''(1) + \varphi'(1). \qquad (3.23)$$

$$\alpha_3[\xi] = \varphi'''(1) + 3\varphi''(1) + \varphi'(1). \qquad (3.24)$$

$$D\xi = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2. \qquad (3.25)$$

3.4.2. Repartițiile uniformă, Bernoulli şi Binomială

Definiție. Vom spune că v.a. ξ este *repartizată uniform (de tip discret)* dacă valorile posibile ale ei sunt *0, 1, 2, ..., n*, iar probabilitățile acestor valori sunt date de formula:

$$p_k = P(\xi = k) = 1/(n+1),, k = 0,1,2,...,n., \qquad (3.26).$$

Mai există şi varianta de repartiție uniformă trunchiată în zero, adică valorile posibile ale v.a. sunt 1,2,…,n, iar

$$p_k = P(\xi = k) = 1/n, k = 0,1,2,...,n. \qquad (3.26^1).$$

Observație. Repartiția uniformă dată de formulele (3.26) sau (3.26¹) modelează din punct de vedere matematic alegerea la intâmplare a unui element dintr-o mulțime de elemente numerotate *0,1,2,…,n* sau *1,2,…,n*, respectiv.

Definiție. Vom spune că v.a. ξ este *repartizată binomial* cu parametrii n şi p dacă valorile posibile ale ei sunt 0, 1, 2, ..., n, iar probabilitățile acestor valori sunt date de formula:

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, 0 < p < 1, k = 0,1,2,...,n., \qquad (3.26")$$

In particular, *atunci când n=1, repartiția Binomială se numeşte repartiție Bernoulli.*

O repartiție Binomială de parametri n şi p se notează cu $Bi(n, p)$. Din definiție rezultă că o v.a. repartizată binomial sau Bernoulli poate fi dată, respectiv, sub forma:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & k & ... & n \\ C_n^0 p^0 q^{n-0} & C_n^1 p^1 q^{n-1} & ... & C_n^k p^k q^{n-k} & ... & C_n^n p^n q^0 \end{pmatrix}, \qquad (3.27)$$

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \qquad (3.28)$$

Observație. Repartiția binomială modelează, din punct de vedere matematic, numărul total ξ de „succese ”în n probe Bernoulli cu una şi aceeaşi probabilitate p a „succesului ”în fiecare probă.

Folosind funcția generatoare se deduc următoarele formule:

$$M\xi = \alpha_1[\xi] = np, \qquad (3.29)$$

$$D\xi = npq, \qquad (3.30)$$

$$\sigma[\xi] = \sqrt{npq}. \qquad (3.31)$$

Dacă $np-q$ este număr întreg, atunci valoarea maximă a probabilității $P_n(k)$ se atinge pentru două valori ale lui k: $k_0 = np-q$ şi $k_0' = np-q+1 = np+p$. Dacă $np-q$ este un număr fracționar, atunci valoarea maximă a probabilității $P_n(k)$ se atinge în punctul $k_0 = [np-q]+1$, unde $[np-q]$ este partea întreagă a numărului $np-q$.

Exemplul 4. Un eveniment aleator A, convențional numit „succes” poate apărea într-un experiment aleatoar cu probabilitatea p = 0,3. Se efectuează 1000 de repetări independente ale acestui experiment. Se cere: 1) să se scrie repartiția variabilei aleatoare ξ care reprezintă numărul total de apariții ale evenimentului A; 2) să se calculeze $Mo[\xi]$, 3) $M\xi$, 4) $D\xi$, 5) $\sigma[\xi]$, 6) $P(250 \le \xi \le 350)$.

Rezolvare. 1) V.a. ξ poate lua una din valorile: 0, 1, 2,…, 1000. Probabilitățile acestor valori se calculează conform formulei Bernoulli. Deci v.a. ξ are repartiția

$$p_k = P(\xi = k) = P_{1000}(k) = C_{1000}^k (0{,}3)^k (0{,}7)^{1000-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, 1000.$$

2) Cum $np - q = 1000 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 = 299{,}3$ este un număr fracționar, rezultă că modul, adică valoarea posibilă care corespunde celei mai mari probabilități este: $Mo[\xi] = [299{,}3]+1 = 299+1 = 300$.

3) $M\xi = np = 1000 \cdot 0{,}3 = 300$.

4) $D\xi = npq = 1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 210$.

5) $\sigma[\xi] = \sqrt{npq} = \sqrt{210}$.

6) Calculăm probabilitatea cerută

$$P(250 \le \xi \le 350) = \sum_{k=250}^{350} C_{1000}^k (0{,}3)^k (0{,}7)^{1000-k}$$

cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[24]:= $\mathrm{N}\left[\sum_{k=250}^{350} \frac{(1000!) * ((0.3)\wedge k) * ((0.7)\wedge(1000-k))}{(k!) * ((1000-k))!}\right]$

Out[24]=0.999509

Am obținut $P(250 \le \xi \le 350) = 0{,}999509$.

3.4.3. Repartiția Poisson

Definiția 1. Vom spune că v.a. ξ are *repartiția Poisson cu parametrul a*, $a > 0$, dacă ea poate lua în calitate de valori posibile una din valorile 0, 1, ..., k,..., probabilitățile cărora sunt date de formula

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.32}$$

unde a este un parametru real pozitiv.

Repartiția Poisson de parametru a se notează cu *Poisson*(a). Din definiție rezultă că o v.a. ξ cu repartiția Poisson(a) poate fi scrisă în forma

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{a^0}{0!} e^{-a} & \frac{a^1}{1!} e^{-a} & \ldots & \frac{a^k}{k!} e^{-a} & \ldots \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Dacă numerele n și k sunt relativ mari și $npq < 9$, atunci repartiția binomială de parametrii n și p poate fi aproximată cu ajutorul repartiției Poisson de parametru $a = np$.

Folosind funcția generatoare, obținem că:

$$M\xi = D\xi = a;\ \sigma[\xi] = \sqrt{a}\ . \qquad (3.34)$$

Dacă a este număr întreg, atunci p_k îşi atinge valoarea maximă pentru $k_0 = a$ şi $k_0 = a-1$. Dacă a este fracționar, atunci $Mo[\xi]=[a]+1$.

Definiția 2. Se numeşte *flux de evenimente* un şir de evenimente aleatoare, care se produc în momente aleatoare de timp. Un flux de evenimente se numeşte *flux Poisson* dacă el are proprietățile:

a) este staționar, adică probabilitatea că într-un anume interval de timp se vor realiza exact k evenimente depinde numai de numărul k şi de lungimea (durata) intervalului de timp şi nu depinde de începutul lui;

b) probabilitatea realizării a k evenimente într-un anume interval de timp nu depinde de numărul de evenimente care s-au realizat înainte de începerea acestui interval;

c) realizarea a două sau mai multe evenimente într-un interval mic de timp are, practic, probabilitate nulă.

Numărul mediu de evenimente dintr-un flux Poisson care se realizează într-o unitate de timp se numeşte *intensitate a fluxului*. Vom nota intensitatea fluxului cu a. Atunci are loc următoarea

Propoziție. *Numărul de realizări ale evenimentelor din fluxul Poisson în t unități de timp este o v.a. cu repartiția*

$$P_t(k) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Pentru $t = 1$ din formula precedentă se obține repartiția Poisson.

Observație. Repartiția Poisson modelează, din punct de vedere matematic, comportamentul probabilistic al:

1)numărului de particule α (alfa) emise de o substanță radioactivă într-un anumit interval de timp;

2)numărului de automobile care vin la o stație de alimentare cu benzină într-o unitate de timp;

3)numărului de clienți care se adresează la un oficiu poştal într-o zi;

4)numărului de apeluri la un post telefonic într-o unitate de timp;

5)numărului de erori de programare comise de un programator într-un soft de o anumită lungime;

6)numărului de bacterii descoperite într-o picătură de apă;

7)numărului de erori de tipar care se conțin pe o pagină (sau un grup de pagini) dintr-o carte;

8)numărului de 3 gemeni noi născuți în decurs de un an în careva țară;

9)numărului de oameni dintr-o anumită țară care au depăşit vârsta de 100 de ani;

10)numărului de cutremure de pământ care au loc într-o regiune seismică într-o unitate de timp;

11)numărului de accidente rutiere produse într-un oraş, într-o unitate de timp;

12)numărului de decese printre asigurații unei companii de asigurare într-o unitate de timp etc., etc.

Exemplul 5. Numărul mediu de solicitări de taxi recepționate la un dispecerat într-un minut este egal cu 2. Să se calculeze probabilitățile evenimentelor: A = {*în decursul unui minut va fi recepționată o singură solicitare*}, B = {*în decursul unui minut vor fi recepționate nu mai mult de 2 solicitări*}, C = {*în decurs de 1 minut vor fi recepționate mai mult de 2 solicitări*}.

Rezolvare. Variabila aleatoare ξ care reprezintă numărul de solicitări de taxi într-un minut are repartiția Poisson de parametru $a = 2$. Această variabilă aleatoare are repartiția

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2},\ k = 0, 1, 2,\ldots \qquad (3.35)$$

1) Cum $P(A) = P(\xi = 1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2}$ avem:

In[25]:=N[$\frac{2^1}{1!}e^{-2}$]

Out[25]=0.270671;

2) Cum $P(B) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)$ din (3.35) avem:

In[26]:=N[$\frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}$]

Out[26]=0.676676

3) Cum $P(C) = 1 - P(B)$, avem :

In[27]:=N[1−0.676676]

Out[27]=0.323224

Am obținut $P(A)$=0,270671, $P(B)$=0,676676, $P(C)$=0,323224.

3.4.4. Repartiția geometrică

Definiție. Vom spune că o variabilă aleatoare ξ are *repartiția geometrică* de parametru *p*, dacă valorile posibile ale ei sunt 0, 1, 2,…, *k*,.. şi probabilitățile lor sunt date de formula

$$p_k = P(\xi = k) = q^k p,\ 0 < p < 1,\ q = 1-p,\ k = 0, 1, 2,\ldots \qquad (3.36)$$

În caz că repartiția este dată de formula

$$p_k = P(\xi = k) = q^{k-1} p,\ 0 < p < 1,\ q = 1-p,\ k = 1, 2,\ldots \qquad (3.37)$$

v.a. ξ se numeşte *geometric repartizată trunchiată în zero.*

De exemplu, repartiția (3.36) poate fi scrisă în următoarea formă matriceală:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Observație. Repartiția geometrică (3.36) modelează, din punct de vedere matematic, numărul total ξ ***de „insuccese "*** înregistrate în experimentul ce constă în repetarea uneia şi aceleiaşi probe Bernoulli (cu probabilitatea *p* a „succesului "în fiecare probă) până la prima apariție a „succesului" . Prin analogie, repartiția geometrică trunchiată în zero (3.37) modelează, din punct de vedere matematic, numărul total ξ ***de probe*** (încercări) efectuate în experimentul ce constă în repetarea uneia şi aceleiaşi probe Bernoulli (cu probabilitatea *p* în fiecare probă) până la prima aparitie a „succesului".

Cu ajutorul funcției generatoare obținem, de exemplu, *pentru repartiția geometrică* că:

$$M\xi = 1\ /p \quad D\xi = q/p^2, \quad \sigma[\xi] = \sqrt{q}/p. \qquad (3.38)$$

Analogic, pentru repartiția geometrică trunchiată în zero

$$M[\xi] = q/p,\ D[\xi] = q/p^2. \qquad (3.39)$$

Exemplul 6. Într-o urnă se conțin 2 bile albe şi 8 bile negre. Se extrage succesiv câte o bilă, cu întoarcere, până la prima apariție a unei bile albe. Să se determine: 1) repartiția v.a. ξ care reprezintă numărul de extrageri până la prima apariție a unei bile albe; 2) $M\xi$; 3) $D\xi$; 4) numărul minim *m* de extrageri , suficient pentru a afirma, cu probabilitatea 0.7, că pentru extragerea unei bile albe vor fi necesare, mai putin de *m* extrageri.

Rezolvare. 1) Notăm cu *A* evenimentul care constă în apariția unei bile albe la o extragere şi cu *N* evenimentul care constă în extragerea unei bile negre. Evident că $N = \overline{A}$. Cum în urnă sunt 2 bile albe şi 8 bile negre, rezultă că $P(A) = 0{,}2$ şi $P(N) = P(\overline{A}) = 1–0{,}2 = 0{,}8$.

Pentru ca bila albă să apară prima dată la prima extragere este echivalent cu faptul ca v.a ξ să ia valoarea 1. Probabilitatea acestui eveniment este egală cu $p_1 = P(A) = 0{,}2$. Evenimentul ca bila albă să apară prima dată la extragerea a doua este echivalent cu faptul ca v.a. ξ să ia valoarea 2. Probabilitatea acestui eveniment este egală cu $p_2 = P(\xi=2) = P(\overline{A}\cap A) = P(\overline{A})P(A) = 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}16$. În general, pentru ca bila albă să apară prima dată la prima extragere cu numarul k este echivalent cu faptul ca v.a ξ să ia valoarea k. Probabilitatea acestui eveniment este egală cu

$$p_k = P(\xi=k) = P(\underbrace{\overline{A}\cap\ldots\cap\overline{A}}_{k-1\quad ori}\cap A) = 0{,}2\cdot(0{,}8)^{k-1},\ k = 1, 2,\ldots$$

Deci variabila aleatoare ξ are o repartiţie geometrică trunchiata în zero cu parametrul $p = 0{,}2$.

2) Conform formulei (3.39) avem: $M[\xi] = 1/0{,}2 = 5$.

3) Din a doua formulă (3.39) obţinem:

$$D[\xi] = (1–0{,}2)/(0{,}2)^2 = 20.$$

4) Determinăm numărul m din condiţia

$$0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}8 + \ldots + 0{,}2\cdot(0{,}8)^{m-1} > 0{,}7.$$

Această inecuaţie se reduce la inecuaţia $m > \log_{0,8}0{,}3$.

Aici aplicăm Sistemul Mathematica.

In[28]:=N[Log[0.8,0.3]]

Out[28]=5.3955

Obţinem $m = 6$.

3.4.5. Repartiţia hipergeometrică

Definiţie. Vom spune că o variabilă aleatoare ξ are o repartiţie hipergeometrică de parametri a, b, n dacă aceasta poate lua una din valorile 0, 1, 2, …, $\min\{a, n\}$ cu probabilităţile

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \min\{a,n\}. \qquad (3.40)$$

Se demonstrează că

$$M[\xi] = na/(a+b). \qquad (3.41)$$

$$D[\xi] = nab(a+b-n)/((a+b)^2(a+b-1) \qquad (3.41^1)$$

Repartiția hipergeometrică apare, de exemplu, în experimentul care constă în extragerea fără întoarcere a bilelor dintr-o urnă care conține bile de două culori.

3.5. Variabile aleatoare de tip (absolut) continuu şi caracteristicile numerice ale acestora

3.5.1. Noțiune de variabilă aleatoare de tip (absolut) continuu

Se numeşte *v.a.de tip (absolut) continuu* (v.a.c.) o variabilă aleatoare, a cărei mulțime de valori posibile reprezintă un interval de numere reale şi funcția de repartiție este continuă în intervalul $(-\infty; \infty)$, dar şi derivabilă, cu exceptia poate că, de o mulțime finită sau infinită cel mult numărabilă de puncte de pe acest interval.

3.5.2. Exemple de variabile aleatoare continue

1) Durata funcționării unui aparat electric este o variabilă aleatoare continuă care poate lua valori din intervalul $[0; \infty)$.

2) Fie că se măsoară lungimea unui obiect sau rezistența unei linii electrice cu un aparat de măsurare astfel încât rezultatul măsurării se rotunjeşte până la un număr întreg. Atunci eroarea de rotunjire este o v.a.c. care ia valori din intervalul $(-1; 1)$.

3) Cantitatea anuală de precipitații atmosferice în careva regiune este o variabilă aleatoare continuă care ia valori din intervalul $[0; \infty)$.

3.5.3. Funcția de repartiție

Funcția de repartiție pentru orice variabilă aleatoare a fost definită în unul din paragrafele precedente. Pentru comoditate amintim aici definiția şi proprietățile acestei funcții.

Se numeşte *funcție de repartiție* a variabilei aleatoare ξ funcția $F\mathbf{:R}\to[0,1]$ definită prin egalitatea

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{3.42}$$

Funcția de repartiție are următoarele ***proprietăți caracteristice***:

1) $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$;

2) $F(x)$ *este o funcție nedescrescătoare*;

3) $F(x)$ *este continuă la stânga în orice punct* $x\in\mathbf{R}$.

Din formulele de calcul ale probabilităților în baza f.r. deducem că:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a). \tag{3.43}$$

$$P(\xi = a) = 0. \tag{3.44}$$

$$P(a \le \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a \le \xi \le b). \tag{3.45}$$

3.5.4. Densitatea de repartiție şi proprietățile acesteia

Definiție. Vom numi *densitate de repartiție (d.r.) a v.a.c.* ξ cu f.r. $F(x)$ funcția $f(x)$ definită prin egalitatea

$$f(x) = F'(x). \tag{3.46}$$

Din definiție rezultă că f.r. *F(x)* a unei v.a.c. poate fi exprimată prin d.r. *f(x)* a acestei v.a ca fiind

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

În concluzie, $P(a \le \xi \le b) = \int_a^b f(x)dx$. (3.46[1])

Densitatea de repartiție este o formă alternativă a *legii de repartiție* a unei variabile aleatoare continue, echivalenta f.r., în sensul că dacă cunoastem una din aceste forme putem restabili cealalată formă. Prima formă a acestei legi este funcția de repartiție. Asadar, v.a.c. este determinată dacă este dată f.r. sau densitatea de repartiție a acesteia.

Graficul d.r. a unei v.a.c. se numeşte *curbă* sau *linia ei de repartiție.* .

D. r. a v.a.c. are proprietățile menționate în următoarea

Propoziție. *Dacă f(x) este d.r. a v.a.c. ξ, atunci*:

1) $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbf{R};$ (3.47)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$ (3.48)

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. (3.49)

3.5.5. Caracteristici numerice ale variabilei aleatoare continue

Definitie. Vom numi *valoare medie a v.a.c.* ξ cu d.r. $f(x)$ numărul $M[\xi]$ (care se notează şi cu m_ξ) definit prin egalitatea

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx , \tag{3.50}$$

cu condiția că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < +\infty$, în caz contrar vom spune ca *v.a.c.* ξ nu posedă valoare medie.

Remarcă. Toate proprietățile valorii medii enunțate în cazul v.a. de tip discret sunt valabile şi pentru v.a.c.

Se numeşte *modul* al v.a.c. numărul, notat cu $x_0=Mo[\xi]$, pentru care densitatea de repartiție $f(x)$ ia valoarea maximală. Dacă numărul acesta este unic, atunci repartitia se numeşte *unimodală*, în caz contrar se numeşte *multimodală.*

Se numeşte *mediană* a variabilei aleatoare ξ numărul, notat cu x_m (sau $Me[\xi]$), care verifică condiția

$$P(\xi < x_m) = P(\xi > x_m) = 1/2. \tag{3.51}$$

Condiția (3.51) este echivalentă cu condiția

$$\int_{-\infty}^{x_m} f(x) dx = 1/2. \tag{3.52}$$

Ecuația (3.52), în raport cu variabila x_m, poate fi aplicată la determinarea medianei.

Folosind noțiunea de valoare medie, ca şi în cazul unei variabile aleatoare de tip discret, se introduc noțiunile de dispersie, abatere medie pătratică, momente inițiale şi momente centrate. Condiția lor de existență este similară cu conditia de existență a valorii medii. Scriem aici numai formulele de calcul ale acestora.

Formula de calcul a dispersiei

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f(x) dx . \tag{3.53}$$

Formula de calcul a abaterii medii pătratice

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi} . \tag{3.54}$$

Formula de calcul a momentelor inițiale

$$\alpha_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx , \quad s = 1, 2,... \tag{3.55}$$

Formula de calcul a momentelor centrate

$$\mu_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^s f(x) dx , \quad s = 1, 2,... \tag{3.56}$$

Remarcă. Proprietățile dispersiei v.a.c sunt aceleasi ca şi în cazul v.a. de tip discret. Relațiile dintre momentele inițiale şi cele centrate pentru v.a.de tip continuu sunt la fel ca şi în cazul v.a. de tip discret.

Fie ξ o v.a., care poate lua numai valori nenegative, dar cu valoare medie nenulă. Se numeşte *coeficient de variație* a acestei variabile aleatoare numărul v definit prin egalitatea

$$v = \sigma_\xi / m_\xi. \tag{3.57}$$

Se numeşte *coeficient de asimetrie* (sau *asimetrie*) a variabilei aleatoare ξ mărimea, notată cu Sk, definită prin egalitatea

$$Sk[\xi] = \mu_3/\sigma^3. \tag{3.58}$$

Se numeşte *exces* al variabilei aleatoare ξ mărimea, notată cu ε sau Ex, definită prin egalitatea

$$Ex[\xi] = \mu_4/\sigma^4 - 3. \tag{3.59}$$

3.5.6. Exemple

Exemplul 7. Variabila aleatoare ξ este definită prin d.r.

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)/18, & x \in [2;8], \\ 0, & x \notin [2;8] \end{cases}$$

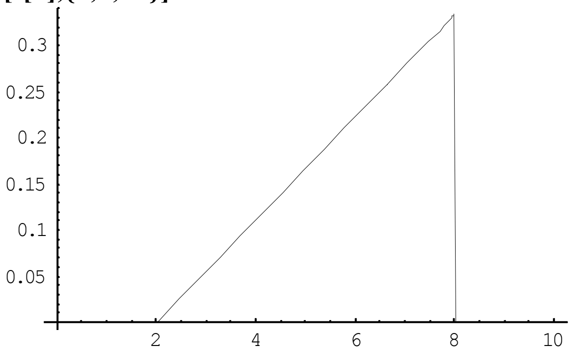
Să se găsească: 1) linia de repartiție; 2) probabilitatea ca ξ să ia valori din intervalul închis [5; 10]; 3) f.r. şi graficul ei; 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordinele *1,2,3 şi 4*; 8) momentele centrate de ordinele *1,2,3 şi 4*; 9) coeficientul de asimetrie; 10) excesul; 11) coeficientul de variație.

Rezolvare. 1) Introducem densitatea de repartiție în Sistemul Mathematica.

In[30]:=f[x_]:=0/;x<2;f[x_]:=(x–2)/18/;2≤x≤8;f[x_]=0/;x>8;

Construim linia de repartiție, adică graficul funcției f(x).

In[31]:=Plot[f[x],{x,0,10}]



Out[31] Graphics.

2) Calculăm probabilitatea cerută conform formulei (3.47).

In[32]:=NIntegrate[f[x],{x,5,8}]

Out[32]=0.75.

3) Determinăm f.r. Cum toate valorile posibile ale v.a.c. ξ aparțin segmentului [2,8], rezultă că $F(x)=0$, $x<2$, şi $F(x)=1$, $x>8$. Determinăm această funcție pe segmentul [2,x] folosind formula (3.49).

In[33]:=F1[x]= $\int_2^x \frac{t-2}{18}dt$

Out[33]= $\frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}$

Deci funcția de repartiție este

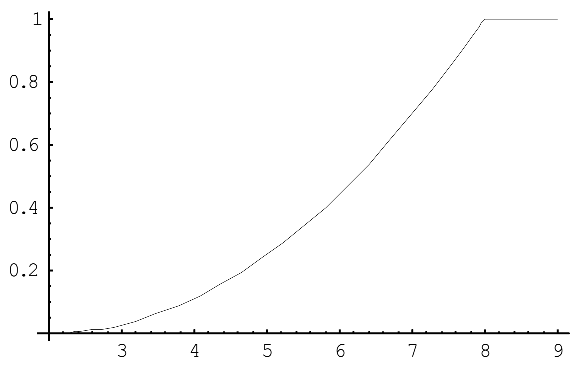
$$F(x)=\begin{cases} 0, \quad x<0, \\ \frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}, \quad 2\le x\le 8, \\ 1, \quad x>8. \end{cases}$$

Introducem această funcție în Sistemul Mathematica.

In[34]:=F[x_]:=0/;x<0;F[x_]:= $\frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}$ **/;2≤x≤8/;F[x_]:=1/;x>8;**

Construim graficul funcției $F(x)$ cu ajutorul funcției **Plot**.

In[35]:=Plot[F[x],{x,2,9}]



Out[35]=Graphics.

4) Calculăm valoarea medie folosind formula (3.50). Avem

In[36]:=m$_\xi$=NIntegrate[x*f[x],{x,2,8}]

Out[36]=6.

Am obținut m_ξ=6.

5) Calculăm dispersia conform formulei (3.53).

In[37]:=N[$\int_2^8 (x-m_\xi)^2 f(x)dx$ **]**

Out[37]=2.

6) Calculăm abaterea medie pătratică σ_ξ conform formulei (3.54).

In[38]:=σ$_\xi$= $\sqrt{2}$

Out[38]=1.41421.

7) Momentul inițial α_1 coincide cu speranța matematică şi deci $\alpha_1[\xi]$ = m_ξ = 6. Găsim celelalte momente inițiale conform formulei (3.55).

In[39]:=N[$\int_2^8 x^2 f(x)dx$ **]**

Out[39]=38

In[40]:=N[$\int_2^8 x^3 f(x)dx$ **]**

Out[40]=250.4

In[41]:=N[$\int_2^8 x^4 f(x)dx$ **]**

Out[41]=1699.2

Am obținut α_1=6, α_2=38, α_3=250,4, α_4=1699,2.

8) Momentul centrat de ordinul 1 este egal cu zero pentru orice v.a.: μ_1 = 0. Momentul centrat de ordinul doi coincide cu dispersia şi deci μ_2 = D_ξ = 2. Calculăm momentele μ_3 şi μ_4 folosind formulele (3.55).

In[42]:=μ$_3$=N[$\int_2^8 (x-m_\xi)^3 f(x)dx$ **]**

Out[42]=–1.6

In[43]:=μ$_4$=N[$\int_2^8 (x-m_\xi)^4 f(x)dx$ **]**

Out[43]=9.6

Am obținut μ_1 = 0, μ_2 = 2, μ_3 = –1,6, μ_4 = 9,6.

9) Calculăm coeficientul de asimetrie conform formulei (3.58):

In[44]:=Sk[ξ]=μ$_3$/(σ$_\xi$)^3

Out[44]=–0.565685

10) Folosim formula de calcul al excesului (3.59).

In[45]:=Ex[ξ]=μ₄/(σξ)⁴–3

Out[45]=–0.6.

11)Calculăm coeficientul de variație conform formulei (3.57).

In[46]:=vξ=σξ/mξ

Out[46]=0.235702

Rezolvarea exercițiului s-a terminat. Scoatem valorile parametrilor din acest exercițiu.

In[47} :=Clear[f,F,mξ,σξ,μ1, μ2, μ3, μ4,Sk[ξ],Ex[ξ],vξ].

3.6. Modele probabiliste (repartiții) te tip (absolut) continuu (uzuale) clasice

3.6.1. Repartiția uniformă

Vom spune că v.a.c. ξ are *repartiție uniformă* pe segmentul $[a, b]$, dacă densitatea ei de repartiție are forma

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases} \tag{3.60}$$

În calitate de *exemplu de variabilă aleatoare cu repartiția uniformă* poate servi durata aşteptării autobuzului care vine la stație peste fiecare 5 minute, în cazul când pasagerul vine la stație într-un moment aleator de timp (independent de orarul circulației autobuzului).

Folosind formula (3.49), determinăm funcția de repartiție $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ (x-a)/(b-a), & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{3.61}$$

Valoarea medie este m_ξ = $(b–a)/2$, iar *dispersia* este D_ξ = $(b–a)^2/12$. Repartiția uniformă nu are *mod*. *Mediana* este egală cu $(b+a)/2$.

În particular, atunci cand *a=0, b=1,* avem *repartitia uniformă* pe segmentul *[0,1]*. Orice limbaj de programare evoluat (C++, Java, etc.) conține funcția *random* cu ajutorul căreia putem simula valori ale unei v.a. uniform repartizate pe *[0,1]*.

Remarcă. Aşa cum repartiţia uniformă pe *[0,1]* modelează, din punct de vedere matematic, experimentul imaginar, ce constă în aruncarea la întâmplare a unui punct pe segmentul *[0,1]*, tot aşa repartiţia uniformă pe *[a,b]* modelează matematic experimentul imaginar cu aruncarea la întâmplare a unui punct pe segmentul *[a,b]*. Are loc urmatoarea

Propoziţie. *Dacă v.a. ξ este uniform repartizată pe segmentul [a,b] , atunci v.a. $\eta= (\xi-a) / (b-a)$ este uniform repartizată pe [0,1]. Dimpotrivă, dacă v.a. η este uniform repartizată pe [0,1], atunci v.a. $\xi =(b-a)\eta+a$ este uniform repartizată pe [a,b].*

Exemplul 8. Un troleibuz soseşte în staţie peste fiecare 5 minute. Care este probabilitatea că un pasager, care vine în staţie într-un moment aleator de timp, va aştepta troleibuzul cel mult 2 minute (evenimentul *A*)?

Rezolvare. D.r. a v.a. ξ, care reprezintă durata aşteptării troleibuzului, este

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & x\in[0;5],\\ 0, & x\notin[0;5].\end{cases}$$

In[48]:= $P(0\le\xi\le 2)=\int_0^2 (1/5)dx$

Out[48[=2/5

Am obţinut $P(A)$=2/5.

3.6.2. Repartiţia exponenţială

Vom spune că o v.a.c. ξ are *repartiţie exponenţială* de parametrul λ, $\lambda>0$, dacă densitatea ei de repartiţie are forma

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{3.62}$$

Funcţia de repartiţie este

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \tag{3.63}$$

Folosind f.r., obţinem probabilitatea că o v.a. cu repartiţie exponenţială să ia valori din intervalul închis [*a*; *b*], $0 < a < b$ coincide cu:

$$P(a<\xi<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Au loc egalităţile:

$$M[\xi] = 1/\lambda.\ D[\xi] = 1/\lambda^2;\ \ \sigma[\xi] = 1/\lambda. \tag{3.64}$$

Un exemplu de v.a. care are repartiție exponențială de parametrul λ este durata vietii unui calculator. Funcția

$$R(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}, \; x \geq 0 \qquad (3.65)$$

se numeşte *funcție de fiabilitate* a aparatului şi valoarea ei în punctul x reprezintă probabilitatea că aparatul să funcționeze fără refuz x unități de timp. Or, funcția de fiabilitate este, prin definiție, funcția

$$R(x) = 1 - F(x), \; x \geq 0.$$

Această repartiție posedă o proprietate remarcabilă redată în:

Propoziție ***(Proprietatea lipsei „memoriei”).*** *Dacă v.a. ξ este exponențial repartizată cu parametrul λ, $\lambda>0$, atunci are loc proprietatea „lipsei memoriei” în sensul că probabilitatea condiționată*

$$\boldsymbol{P}(\xi<t+h/\xi\geq t) = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda h}, & h > 0, \\ 0, & h \leq 0. \end{cases}$$

Exemplul 9. Fie că durata funcționării fără a ieşi din funcțiune a unui PC este o variabilă aleatoare ξ care are repartiție exponențială de paramertul λ = 0,001. Să se determine: 1) d.r.; 2) f.r.; 3) fiabilitatea; 4) valoarea medie şi dispersia; 5) probabilitatea ca PC-ul să funcționeze fără refuz cel puțin 2000 de ore (evenimentul A).

Rezolvare. 1) Cum λ = 0,001, din (3.62) rezultă că densitatea de repartiție a variabilei aleatoare ξ este

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}001 e^{-0{,}001x}, \; x \geq 0, \\ 0, \quad x < 0. \end{cases}$$

2) Conform formulei (3.63), funcția de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}001x}, \; x \geq 0, \\ 0, \quad x < 0. \end{cases}$$

3) Din (3.65) rezultă că funcția de fiabilitate este

$$R(x) = e^{-0{,}001x}, \; x \geq 0.$$

4) Din (3.64) rezultă că valoarea medie este $M[\xi] = 1/0{,}001 = 1000$, iar dispersia este $D[\xi] = 1/(0{,}001)^2 = 1000000$.

5) Folosim formula (3.65).

In[49]:=P(ξ>2000)=N[e$^{-0.001*2000}$]

Out[49]=0.135335

Am obținut $P(A)$=0,135335.

3.6.3. Repartiția normală

Vom spune că v.a.c. ξ are *repartiție normală*, dacă d.r. este de forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.66}$$

unde m şi $\sigma > 0$ sunt valori constante reale, numite *parametri* ai repartiției normale.

Atunci când $m=0$ şi $\sigma=1$ repartiția se mai numeşte normală standard cu parametrii 0 şi 1.În acest caz funcția de repartiție coincide cu

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt .$$

Exemple de v.a.c. de repartiție normală sunt: cantitatea anuală de precipitații atmosferice dintr-o anumită regiune, eroarea care se obține la măsurarea unei mărimi cu un aparat cu gradații, înălțimea unui bărbat luat la întamplare.

Linia repartiției normale poartă denumirea de *linia lui Causs*.

Propozitie. *F.r. a v.a ξ normal repartizate cu parametrii m şi σ coincide cu*

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \tag{3.67}$$

unde $\Phi(x)$ este funcția Laplace care se defineşte prin egalitatea

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt , \tag{3.68}$$

şi reprezintă f.r. a unei v.a. repartizată normal standard cu parametrii 0,1.

Cu alte cuvinte $\Phi(x)$, fiind f.r. a unei v.a. normal standard repartizate cu parametrii 0 şi 1, au loc egalitățile:

$$m_\xi = m,\ D_\xi = \sigma^2,\ \sigma_\xi = \sigma, \tag{3.69}$$

$$P(\alpha \le \xi \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \tag{3.70}$$

Exemplul 10. Presupunem că, anual, cantitatea de precipitații atmosferice dintr-o anumită regiune este o v.a.c. cu repartiție normală de parametri m = 400 mm şi σ = 100 mm. Să se calculeze probabilitatea că la anul viitor cantitatea de precipitaţii atmosferice va întrece 500 mm (evenimentul A).

Rezolvare. Densitatea de repartiţie este

$$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-400)^2}{2(100)^2}}.$$

Folosim formula (3.46[1]).

In[50]:=N[$\int_{500}^{\infty}\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-(x-400)^2/(2*100^2)}dx$ **]**

Out[50]=0.158655

Am obţinut $P(A)$=0,158655.

Sistemul Mathematica conţine un pachet de programe dedicat repartiţiei normale. Acest pachet poate fi instalat cu ajutorul funcţiei **<<Statistics`NormalDistribution`.** Dăm un exemplu de utilizare a acestui pachet.

Exemplul 11. Fie ξ o v.a.c. cu repartiţie normală de parametri m=3 şi σ=2. Se cere: 1) să se instaleze pachetul de programe **Statistics`NormalDistribution`** ; 2) să se definească (introducă) v.a.c. dată ; 3) să se determine d.r. ; 4) să se construiască linia de repartiţie ; 5) să se determine f.r.; 6) să se construiască graficul f.r.; 7) să se construiască, pe acelaşi desen, graficele d.r. şi a f.r.; 8) să se construiască pe acelaşi desen graficele d.r. a f.r. astfel, ca grosimea graficului densităţii de repartiţie să fie egală cu 0,5 din grosimea standard, iar grosimea graficului funcţiei de repartiţie să fie egală cu 0,9 din grosimea standard.

Rezolvare. 1) Ne aflăm (lucrăm cu un document) în Sistemul Mathematica. Instalăm pachetul cerut de programe.

Statistics`NormalDistribution`

2) Definim v.a.c. dată ξ de repartiţie normală şi îi dăm numele **rn**

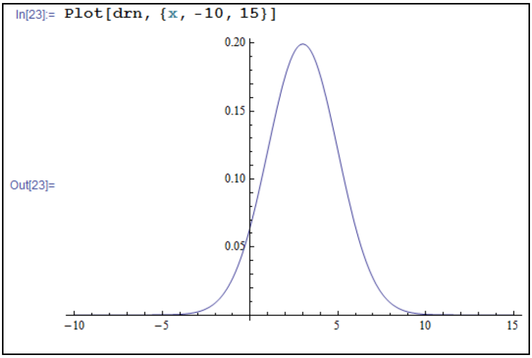
```
In[21]:= rn = NormalDistribution[3, 2]

Out[21]= NormalDistribution[3, 2]
```

3) Definim densitatea de repartiţie şi îi dăm numele **drn**

In[22]:= drn = PDF[rn, x]

Out[22]= $\frac{e^{-\frac{1}{8}(-3+x)^2}}{2\sqrt{2\pi}}$

4) Construim graficul densității de repartiție drn folosind funcția Plot

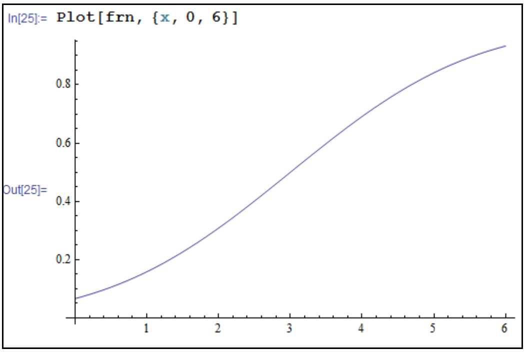


5) Definim funcția de repartiție şi îi dăm numele **frn**.

```
In[24]:= frn = CDF[rn, x]
```

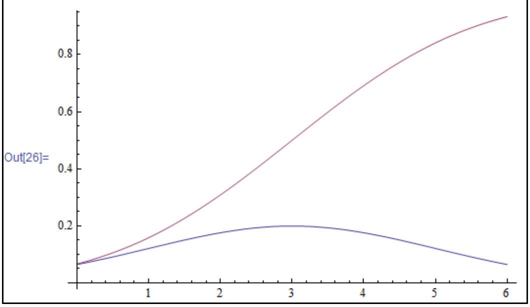
$$\text{Out[24]=}\ \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left[\frac{3-x}{2\sqrt{2}}\right]$$

Aici funcția Erf este următoarea



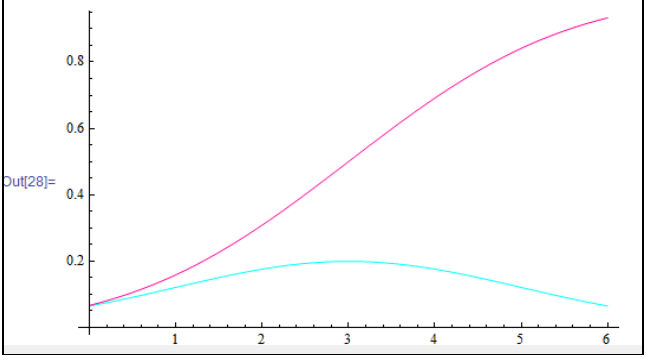
6) Construim graficul funcției de repartiție.

```
In[26]:= Plot[{drn, frn}, {x, 0, 6}]
```



7) Construim pe acelaşi desen graficul densității de repartiție cu grosimea egală cu 0,5 din grosimea standard şi graficul funcției de repartiție cu grosimea egală cu 0,9 din grosimea standard.

```
In[28]:= Plot[{drn, frn}, {x, 0, 6},
          PlotStyle -> {Hue[0.5], Hue[0.9]}]
```



Pe ecran apare graficul densității de repartiție de culoare albastră şi graficul funcției de repartiție de culoare roşie.

Rezolvarea exercițiului s-a terminat. Rămune să scoatem valorile parametrilor.

```
In[29]:= Clear[rn, drn, frn]
```

3.6.4. Repartiția gamma

Se spune că v.a. continuă ξ are *repartiția gamma* de parametri a şi b, dacă densitatea de repartiție a ei este

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}e^{-x/b}}{b^a\Gamma(a)}, & a>0,\ b>0, \quad x\geq 0,\\ 0, \quad x<0,\end{cases} \tag{3.71}$$

unde Γ este funcția gamma, care se defineşte prin egalitatea

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt.$$

Au loc egalitățile $M\xi = ba$, $D\xi = b^2a$, $\sigma[\xi]=b\sqrt{a}$.

3.6.5. Repartiția hi-pătrat (χ^2)

Se spune că variabila aleatoare continuă ξ are repartiție hi-pătrat (χ^2) de parametri r şi σ dacă are densitatea de repartiție

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{r/2-1}e^{-x/(2\sigma^2)}}{2^{r/2}\sigma^r\Gamma(r/2)}, & \sigma>0, r\in N, \quad x\geq 0,\\ 0, \quad x<0.\end{cases} \tag{3.72}$$

Repartiția hi-pătrat este un caz particular al repartiției gamma: funcția (3.72) se obține din (3.71) pentru $a = r/2$ şi $b = 2\sigma^2$. Folosind rezultatele punctului precedent, deducem că pentru o variabilă aleatoare ξ cu repartiția hi-pătrat (3.71) avem:

$$M\xi = r\sigma^2,\ D\xi = 2r\sigma^4,\ \sigma[\xi] = \sigma\sqrt{2r}.$$

Se demonstrează că dacă ξ_1, ξ_2, ..., ξ_r sunt variabile aleatoare cu repartiție normală de parametri $m = 0$ şi $\sigma = 1$, atunci variabila aleatoare

$$\xi=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_r^2$$

are repartiție hi-pătrat de parametri $\sigma = 1$ şi r.

3.7. Exerciții pentru lucrul individual

1. Este dată repartiția v.a. de tip discret ξ:

$$\xi:\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4\end{pmatrix}$$

(datele numerice se conțin pe variante după enunțul exercițiului). Se cere: 1) să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.d. ξ; 2) funcția de repartiție şi graficul ei; 3) probabilitatea ca ξ va lua valori din intervalul $[1; 4)$; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

1) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=3$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}2$;
2) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=7$, $x_4=3$, $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
3) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
4) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
5) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=3$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}4$;
6) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
7) $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}1$;
8) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}2$;
9) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}6$;
10) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
11) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}1$, $p_2=06$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
12) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}2$;
13) $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
14) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
15) $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
16) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=4$, $p_1=0{,}5$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}1$;
17) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=2$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}2$;
18) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
19) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}6$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
20) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}2$;
21) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}1$;
22) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=2$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}2$;
23) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=4$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}2$;
24) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}4$;
25) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}3$;
26) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=5$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}1$;
27) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}1$;
28) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}2$;
29) $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}3$;
30) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}4$.

2. Presupunem probabilitatea statistică că un copil nou născut să fie băiat este egală cu 0.51. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a. ξ care reprezintă numărul de băieți printre 1000 de copii nou născuți; 2) să se calculeze probabilitatea că printre 1000 de copii nou născuți numărul băieților va fi cuprins între 300+k şi 500+k, unde k este numărul variantei.

3. Numărul ξ de particule alfa emise de un gram de substanță radioactivă într-o secundă este o v.a.d. cu repartiția Poisson cu parametrul a, unde a este numărul mediu de particule alfa emise într-o secundă. 1) Să se determine seria de repartiție a v.a.d. ξ. 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor: A = {*într-o secundă vor fi emise nu mai mult de două particule alfa*} şi B = {*într-o secundă vor fi emise cinci particule alfa*}, C = {*într-o secundă vor fi emise mai mult de zece particule alfa*}. Care este numărul de particule alfa care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că a=1+0,25n, unde n este numărul variantei.

4. Să se scrie legea de repartiție a variabilei aleatoare ξ care reprezintă numărul de aruncări nereuşite ale unui zar până la prima apariție a numărului 4. Să se calculeze probabilitatea că numarul aruncărilor nereuşite va varia între 5+k si 15+k , unde k este numărul variantei.

5. V.a.c. ξ este definită de densitatea sa de repartiție $f(x)$. Să se determine: 1) reprezentarea v.a.c. ξ în Sistemul Mathematica; 2) linia de repartiție; 3) funcția de repartiție $F(x)$ şi graficul ei; 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) coeficientul de variație; 8) momentele inițiale de ordinele până la 4 inclusiv; 9) momentele centrale de ordinele până la 4 inclusiv; 10) asimetria; 11) excesul; 12) probabilitatea ca ξ va lua valori din prima jumătate a intervalului de valori posibile. Funcția $f(x)$ este dată pe variante.

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3],\\ 0, & x\notin[1,3];\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/9, & x\in[1,4],\\ 0, & x\notin[1,4];\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & x\in[1,2],\\ 0, & x\notin[1,2];\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/8, & x\in[1,5],\\ 0, & x\notin[1,5];\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 2(x-1)/25, x\in[1,6], \\ 0, \quad x\notin[1,6]; \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} (x-1)/18, \quad x\in[1,7], \\ 0, \quad x\notin[1,7]; \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} 2(x-1)/49, \quad x\in[1,8], \\ 0, \quad x\notin[1,8]; \end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases} 2(x-2), \quad x\in[2,3], \\ 0, \quad x\notin[2,3]; \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} (x-2)/2, x\in[2,4], \\ 0, \quad x\notin[2,4]; \end{cases}$ 10) $f(x)=\begin{cases} 2(x-2)/9, x\in[2,5], \\ 0, \quad x\notin[2,5]; \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} (x-2)/8, \quad x\in[2,6], \\ 0, \quad x\notin[2,6]; \end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases} 2(x-2)/25, x\in[2,7], \\ 0, \quad x\notin[2,7]; \end{cases}$ 13) $f(x)=\begin{cases} (x-2)/18, \quad x\in[2,8], \\ 0, \quad x\notin[2,8]; \end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases} 2(x-2)/49, x\in[2,9], \\ 0, \quad x\notin[2,9]; \end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases} 2x-6, x\in[3,4], \\ 0, \quad x\notin[3,4]; \end{cases}$ 16) $f(x)=\begin{cases} (x-3)/2, \quad x\in[3,5], \\ 0, \quad x\notin[3,5]; \end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases} 2(x-3)/9, x\in[3,6], \\ 0, \quad x\notin[3,6]; \end{cases}$ 18) $f(x)=\begin{cases} (x-3)/8, x\in[3,7], \\ 0, \quad x\notin[3,7]; \end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases} 2(x-3)/25, x\in[3,8], \\ 0, \quad x\notin[3,8]; \end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases} (x-3)/18, x\in[3,9], \\ 0, \quad x\notin[3,9]; \end{cases}$ 21) $f(x)=\begin{cases} (2-x)/2, \quad x\in[0,2], \\ 0, \quad x\notin[0,2]; \end{cases}$

22) $f(x)=\begin{cases} (4-x)/8, x\in[0,4], \\ 0, \quad x\notin[0,4]; \end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases} (6-x)/18, x\in[0,6], \\ 0, \quad x\notin[0,6]; \end{cases}$ 24) $f(x)=\begin{cases} (8-x)/32, \quad x\in[0,8], \\ 0, \quad x\notin[0,8]; \end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases} (10-x)/50, x\in[0,10], \\ 0, \quad x\notin[0,10]; \end{cases}$ 26 $f(x)=\begin{cases} 2(1-x), \quad x\in[0,1], \\ 0, \quad x\notin[0,1]; \end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases} 2(3-x)/9, & x\in[0,3], \\ 0, & x\notin[0,3]; \end{cases}$ 28) $f(x)=\begin{cases} 2(5-x)/25, & x\in[0,5], \\ 0, & x\notin[0,5]; \end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases} 2(7-x)/49, & x\in[0,7], \\ 0, & x\notin[0,7]; \end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases} 2(9-x)/81, & x\in[0,9], \\ 0, & x\notin[0,9]. \end{cases}$

6.V.a. ξ are repartiția normală cu valoarea medie *m* şi cu abaterea medie pătratică σ. 1) să se instaleze pachetul de programe **Statistics`NormalDistribution`** ; 2) să se definească (introducă) v.a.c. dată ; 3) să se definească (determine) densitatea de repartiție ; 4) să se construiască linia de repartiție ; 5) să se definească (determine) funcția de repartiție ; 6) să se construiască graficul funcției de repartiție ; 7) să se construiască pe acelaşi desen graficele densității de repartiție şi al funcției de repartiție ; 8) să se construiască pe acelaşi desen gfaficele densității de repartiție şi al funcției de repartiție astfel, ca grosimea graficului densității de repartiție să fie egală cu 0,5 din grosimea standard, iar grosimea graficului funcției de repartiție să fie egală cu 0,9 din grosimea standard; 9) să se calculeze probabilitatea ca ξ să ia valori din intervalul [α, β]. Valorile lui *m*, σ, α şi β sunt date pe variante.

1)*m*=3, σ=2, α=2, β=8; 2)*m*=4, σ=2, α=2, β=7; 3)*m*=5, σ=2, α=2, β=6; 4)*m*=6, σ=2, α=4, β=9; 5)*m*=7, σ=2, α=4, β=8; 6)*m*=9, σ=2, α=6, β=9; 7)*m*=9, σ=2, α=7, β=12; 8)*m*=3, σ=3, α=2, β=5; 9)*m*=4, σ=3, α=2, β=7; 10)*m*=5, σ=3, α=4, β=7; 11)*m*=6, σ=3, α=4, β=9; 12)*m*=7, σ=3, α=6, β=9; 13)*m*=8, σ=3, α=5, β=9; 14)*m*=9, σ=3, α=7, β=10; 15)*m*=5, σ=4, α=4, β=8; 16)*m*=6, σ=4, α=4, β=9; 17)*m*=7, σ=4, α=5, β=8; 18)*m*=8, σ=4, α=5, β=9; 19)*m*=9, σ=4, α=7, β=10; 20)*m*=6, σ=5, α=4, β=7; 21)*m*=7, σ=5, α=4, β=9; 22)*m*=8, σ=5, α=5, β=9; 23)*m*=8, σ=5, α=6, β=9; 24)*m*=8, σ=5, α=7, β=9; 25)*m*=2, σ=2, α=1, β=3; 26)*m*=3, σ=2, α=1, β=4; 27)*m*=4, σ=2, α=1, β=5; 28)*m*=4, σ=3, α=2, β=5; 29)*m*=5, σ=2, α=1, β=6; 30)*m*=6, σ=3, α=2, β=8.

7. Înălțimea unui bărbat este o v.a. cu repartiția normală. Presupunem că această repartiție are parametrii $m=175+(-1)^n/n$ cm şi $\sigma=6-(-1)^n/n$ cm. Să se formeze programul de confecționare a costumelor bărbăteşti pentru o fabrică de confecții care se referă la asigurarea cu costume a bărbaților, înălțimile cărora aparțin intervalelor: [150, 155), [155, 160), [160, 165), [165, 170), [170, 175), [175, 180), [180, 185), [185, 190), [190, 195), [195, 200], *n* fiind numarul variantei, *n=1,2,…30*.

8. Presupunem că o convorbire telefonică durează în medie 5 minute şi este o v.a. ξ de repartiție exponențială. 1) Să se introducă în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. ξ. 2) Să se determine funcția de repartiție şi să se construiască graficul e. 3) Dacă vă apropriați de o cabină telefonică imediat după ce o persoană a intrat în ea atunci care este probabilitatea că o să aşteptați nu mai mult de 2+*n/*3 minute, unde *n* este numărul variantei, *n=1,2,…,30*?

9. Un autobuz circulă regulat cu intervalul 30 minute. 1) Să se scrie în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. ξ care reprezintă durata aşteptării autobuzului de către un pasager care soseste în stație într-un moment aleator de timp. 2) Să se construiască linia de repartiție. 3) Să se determine f.r.e şi să se construiască graficul ei. 4) Care este probabilitatea că, sosind în stație, pasagerul va aştepta autobuzul nu mai mult de 10+*n*/2 minute, unde numărul *n* coincide cu numărul variantei.

10. Cantitatea anuală de precipitații atmosferice are repartiție normală. Presupunem că anual, cantitatea de precipitații într-o anumită regiune este o v.a. aleatoare de repartiție normală de parametrii m = 500 (mm) şi σ = 150. Care este probabilitatea că în anul viitor cantitatea de precipitații va fi cuprinsă între 400+5*n* şi 500+5*n*, unde *n* este numărul variantei. Dacă considerăm că un an este secetos când cantitatea de precipitații nu depăşeşte 300 mm, atunci care este probabilitatea că doi din viitorii zece ani vor fi secetoşi?

4. SISTEME DE VARIABILE ALEATOARE (S.V.A.) MULTIDIMENSIONALE SAU VECTORI ALEATORI

4.1. Introducere

În acest paragraf se conține o trecere în revistă a teoriei referitor la sisteme de variabile aleatoare (v.a. multidimensionale sau vectori aleatori) şi se propun exemple de rezolvare a problemelor respective cu ajutorul Sistemului de programe Mathematica. În afară de funcțiile definite anterior, în acest paragraf se aplică şi alte funcții şi opțiuni ne folosite anterior:

Plot3D care construieşte grafice ale funcţiilor reale de două variabile reale;
PlotRange care impune valori dorite pe axa *Oy* în cazul funcţiei Plot şi – pe axa *Oz* în cazul funcţiei Plot3D;
PlotStyle care impune un anumit stil, anumite dimensiuni ale elementelor graficului;
PointSize care impune dimensiuni dorite ale punctelor graficelor;
ListPoint care construieşte punctele cu coordonatele date într-o listă;
Apply[Plus,p,1] care calculează suma elementelor liniilor matricei **p** şi scrie aceste sume în formă de linie.

4.2. Sisteme de variabile aleatoare (v.a.) multidimensionale. Funcția de repartiție

4.2.1. Noțiune de v.a. multidimensionale

Rezultatul unor experiențe aleatoare sunt descrise nu cu o singură variabilă aleatoare dar cu ajutorul a două, trei sau mai multe variabile aleatoare. În acest caz spunem că avem de-a face cu un ***sistem de variabile aleatoare (v.a. multidimensionale sau vectori aleatori), prescurtat, s.v.a.***

De exemplu, coordonatele punctului de aterizare a unui aparat cosmic reprezintă un sistem de două variabile aleatoare.

Definiție. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate şi $\xi\mathbf{:}\Omega\to\mathbf{R}$, $\eta\mathbf{:}\Omega\to\mathbf{R}$ sunt două variabile aleatoare. Se numeşte *sistem de două variabile aleatoare (v.a. 2-dimensională sau vector aleator 2-dimensional)* o funcție $\zeta\mathbf{:}\Omega\to\mathbf{R}^2$, unde $\zeta(\omega) = (\xi(\omega),\eta(\omega))$, $\omega\in\Omega$.

Sistemul de variabile aleatoare definit de variabilele aleatoare ξ şi η se notează cu (ξ, η).

Asemănător se defineşte şi un sistem de *n* variabile aleatoare. Un sistem de *n* variabile aleatoare se numeşte şi *v.a. n- dimensională* sau *vector aleator n-dimensional*.

V.a. ξ şi η, care definesc sistemul de variabile aleatoare (ξ, η) se numesc *variabile aleatoare marginale*, iar legile lor de repartiție se numesc *legi de repartiție marginale.*

4.2.2. Funcția de repartiție

Pentru a simplifica scrierile, în cele ce urmează vom considera un sistem de două variabile aleatoare.

Definiție. Fie (ξ, η) un sistem de două variabile aleatoare. Se numeşte *funcție de repartiție* a acestui sistem funcția $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin egalitatea

$$F(x, y) = P(\xi < x; \eta < y). \qquad (4.1)$$

Ca şi în cazul unei variabile aleatoare partea dreaptă a egalității (4.1) reprezintă probabilitatea evenimentului

$$\{\omega \in \Omega\text{: } \xi(\omega) < x \text{ şi } \eta(\omega) < y\} = \{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}.$$

4.2.3. Proprietăți ale funcției de repartiție

Funcția de repartiție $F(x, y)$ a unui s.v.a. (ξ, η) are proprietățile:

1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$;

2) $F(x, y)$ este nedescrescătoare în raport cu fiecare variabil[x sau y în parte;

3) $F(x, y)$ este continuă la stânga în raport cu fiecare variabi[a x sau y în parte;

4) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$;

5) $F(\infty, \infty) = 1$;

6) Au loc egalitățile

$$F(\infty, y) = F_\eta(y), \;\; F(x, \infty) = F_\xi(x), \qquad (4.2)$$

unde $F_\xi(x)$ şi $F_\eta(y)$ sunt funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare ξ şi, respectiv, η, adică sunt *funcțiile de repartiție marginale*.

4.2.4. Probabilitatea ca un s.v.a. să ia valori dintr-un dreptunghi. Independența v.a

Fie R un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate şi cu vârfurile (α, γ), (β, γ), (β, δ) şi (α, δ):

$$R = \{(x, y) : \alpha \leq x < \beta, \gamma \leq y < \delta\}$$

Atunci probabilitatea $P[(\xi, \eta) \in R]$ ca punctul aleator (ξ, η) să aparțină dreptunghiului R se calculează conform formulei

$$P[(\xi, \eta) \in R] = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma). \qquad (4.3)$$

Definiție. Vom spune că v.a. ξ, η sunt independente dacă

$$P[(\xi, \eta) \in R] = P\{\alpha \leq \xi < \beta, \gamma \leq \eta < \delta\} = P\{\alpha \leq \xi < \beta\} P\{\gamma \leq \eta < \delta)\,.$$

4.2.5. Funcția de repartiție condiționată

Definiție. Se numeşte *funcție de repartiție condiționată* a unei variabile aleatoare dintr-un sistem (ξ, η) funcția ei de repartiție calculată cu condiția că cealaltă variabilă aleatoare ia o valoare dintr-un anumit interval.

Fie că $F(x, y)$ este funcția de repartiție a sistemului de variabile aleatoare (ξ, η). Din definiția funcției de repartiție şi formula de înmulțire a probabilităților obținem:

$$F(x, y) = P(\xi < x; \eta < y) = P(\xi < x)\cdot P[(\eta < y) \mid (\xi < x)] =$$
$$F_\xi(x)P[(\eta < y) \mid (\xi < x)].$$

Notând

$$F_\eta(y \mid \xi < x) = P[(\eta < y) \mid (\xi < x)],$$

din egalitatea precedentă obținem

$$F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y \mid \xi < x). \qquad (4.4)$$

Asemănător se obține egalitatea

$$F(x, y) = F_\eta(y)F_\xi(x \mid \eta < y), \qquad (4.5)$$

unde

$$F_\xi(x \mid \eta < y) = P[(\xi < x) \mid (\eta < y)].$$

Funcția $F_\xi(x \mid \eta < y)$ este *funcția de repartiție a variabilei aleatoare* ξ *condiționată de evenimentul* $(\eta< y)$, iar $F_\eta(y \mid \xi < x)$ este *funcția de repartiție a variabilei aleatoare* η *condiționată de evenimentul* $(\xi < x)$.

Dacă ξ şi η sunt variabile aleatoare independente, atunci

$$F_\xi(x \mid \eta < y) = F_\xi(x) \text{ şi } F_\eta(y \mid \xi < x) = F_\eta(y)$$

şi din (4.4) si (4.5) rezultă:

$$F(x, y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y). \qquad (4.6)$$

Egalitatea (4.6) este o condiție necesară şi suficientă ca variabilele aleatoare ξ şi η din sistemul (ξ, η) să fie variabile aleatoare independente.

4.2.6. Exemple

Exemplul 1. S.v.a. (ξ, η) are funcția de repartiție

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D; \end{cases}$$

unde

$$D = \{(x, y) : 0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty\}.$$

1) Să se introducă în Sistemul Mathematica funcția $F(x,y)$.

2) Să se construiască graficul funcției $F(x,y)$ pe domeniul

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}.$$

3) Să se calculeze probabilitatea ca punctul aleator (ξ, η) să aparțină pătratului

$$D_2 = \{(x, y) : 0 \le x < 1/2,\ 0 \le y < 1/3\}.$$

Rezolvare. 1) Introducem funcția de repartiție $F(x,y)$ în Sistemul Mathematica.

In[**k1** + **1**] := **F**[**x_**, **y_**] := **1** - $\mathbf{3^{-x}}$ - $\mathbf{3^{-y}}$ + $\mathbf{3^{-x-y}}$;

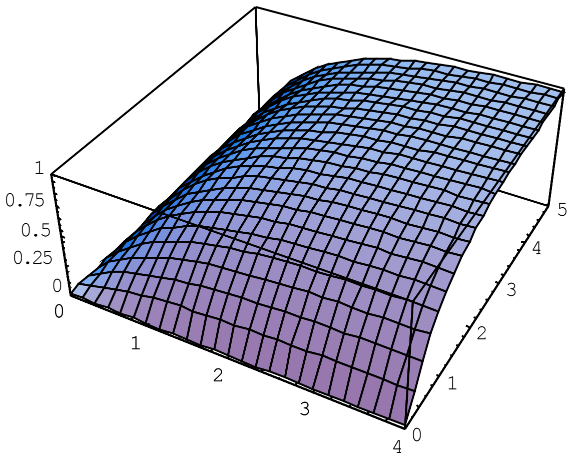
In[**k1** + **1**] := **F**[**x_**, **y_**] := **1** - $\mathbf{3^{-x}}$ - $\mathbf{3^{-y}}$ + $\mathbf{3^{-x-y}}$;

In[k1+1]:=F[x_,y_]:=1–$\mathbf{3^{-x}}$–$\mathbf{3^{-y}}$+$\mathbf{3^{x+y}}$;

Observație. În cele trei linii imediat precedente este scris acelaşi text în trei moduri diferite. În prima din aceste linii a fost introdusă instrucțiunea respectivă din Mathematica în Word aplicând algoritmul : Edit, PasteSpecial, Picture(EnhancedMetafile), OK ; în a doua – algoritmul : Edit, PasteSpecial, Picture, OK. În linia a treia acelaşi text este scris în Word. Ce mod de scriere este mai « potrivit»?

2) Construim graficul funcției $F(x,y)$ cu ajutorul funcției **Plot3D** care construieşte graficul funcției de două variabile.

In[**k1** + **2**] := **Plot3D**[**F**[**x**, **y**], {**x**, **0**, **4**}, {**y**, **0**, **5**}]



Out[**k1** + **2**] = **- SurfaceGraphics -**

3) Calculăm probabilitatea cerută conform formulei (3).

In[**k1** + **3**] := **N**[**F**[**1** / **2**, **1** / **3**] - **F**[**0**, **1** / **3**] - **F**[**1** / **2**, **0**] + **F**[**0**, **0**]]

Out[**k1** + **3**] = **0.129601**

Am obținut $P((\xi,\eta)\in D_2) \approx 0{,}129601$.

Rezolvarea exercițiului s-a terminat. Scoatem expresia atribuită funcției $F(x,y)$ în acest exemplu.

In[k1+4]:=Clear[F].

4.3. Variabile aleatoare multidimensionale de tip discret şi caracteristicile numerice ale acestora

4.3.1. Definiția s.v.a. de tip discret (s.v.a.d.)

Dacă în s.v.a. (ξ, η) v.a. ξ şi η sunt de tip discret, atunci acesta se numeşte *sistem de v.a. de tip discret (s.v.a.d.).*

Din definiție rezultă că mulțimea de valori ale unui sistem de variabile aleatoare discrete este o mulțime finită sau infinită, cel mult, numărabilă.

4.3.2. Matricea de repartiție

Fie (ξ, η) o v.a.d., iar $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, sunt valorile posibile ale v.a. ξ , $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, sunt valorile posibile ale variabilei aleatoare η şi

$$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j) \tag{4.7}$$

sunt probabilitățile ca v.a. (ξ, η) să primească valoarea (x_i, y_j), $i = 1, 2,\ldots, m$; $j = 1, 2,\ldots, n$. Cum evenimentele $(\xi, \eta) = (x_i, y_j)$, $i = 1, 2,\ldots, m$; $j = 1, 2,\ldots, n$, formează un sistem complet de evenimente, are loc egalitatea

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 . \tag{4.8}$$

Este comod să scriem repartiția v.a. (ξ, η) în formă de tabel (tabelul 4.1), care se numeşte *matrice de repartiție* . Această repartiție se mai numeşte si *repartiție in ansamblu* a v.a.

Tabelul 4.1 Matrice de repartiție

$\backslash\ \eta$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{in}
…	…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mj}	…	p_{mn}

Având matricea de repartiție , se poate calcula funcția de repartiție a sistemului (ξ, η) conform formulei

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij} \ . \tag{4.9}$$

4.3.3. Determinarea repartițiilor marginale

Fie (ξ, η) un sistem de variabile aleatoare discrete cu matricea de repartiție (Tabelul 4.1). Valorile posibile ale variabilei aleatoare ξ sunt $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Probabilitățile p_{x_1} , p_{x_2} , …, p_{x_m} ale acestor valori se calculează conform formulelor

$$p_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\ , \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.10}$$

Repartiția marginală a variabilei aleatoare ξ este:

$$\xi: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_{x_1} & p_{x_2} & \ldots & p_{x_m} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

iar r*epartiția marginală a variabilei aleatoare* η din sistemul (ξ, η) cu repartiția în ansamblu (Tabelul 4.1) este:

$$\eta: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ p_{y_1} & p_{y_2} & \ldots & p_{y_n} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

unde

$$p_{y_j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\ , j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.13}$$

Evident, că dacă variabilele aleatoare sunt independente, atunci

$$p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}\ ,\forall \ i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.14}$$

Este valabilă şi reciproca.

4.3.4. Caracteristici numerice ale unui s.v.a.d

Definiție. Se numeşte *moment inițial de ordinul k+s* al s.v.a.d. (ξ, η) mărimea, notată cu $\alpha_{k,s}$ şi egală cu speranța matematică a produsului $\xi^k\eta^s$:

$$\alpha_{k,s} = M\,[\xi^k\eta^s], \quad k, s = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

Din (4.15) şi formula de calcul a valorii medii a v.a.d., rezultă *formula de calcul a momentelor inițiale* :

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^k y_j^s p_{ij}\ , \quad k, s = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.16}$$

Momentele inițiale de ordine 1+0 şi 0+1 coincid cu valorile medii ale variabilelor ξ şi, respectiv, η. F*ormulele de calcul ale valorilor medii* sunt:

$$M\xi = \sum\sum x_i p_{ij} \ , \ M\eta = \sum\sum y_j p_{ij} \ . \qquad (4.17)$$

Aceste valori medii se notează şi cu m_ξ şi m_η. Valorile medii pot fi calculate şi pe baza repartițiilor marginale:

$$M\xi = \sum x_i p_{x_i} \ , \ M\eta = \sum y_j p_{y_j} \ . \qquad (4.18)$$

Definiție. Se numeşte *moment centrat de ordinul k+s* al sistemului de variabile aleatoare (ξ, η), mărimea notată cu $\mu_{k,s}$, egală cu speranța matematică a produsului variabilelor centrate $\xi_o^k \eta_o^s$:

$$\mu_{k,s} = M[\xi_o^k \eta_o^s], \ k, s = 0, 1, 2,... \qquad (4.19)$$

Formula de calcul a momentelor centrate este:

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - m_\xi)^k (y_j - m_\eta)^s p_{ij} \ , \ k, s = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4.20)$$

Momentul centrat $\mu_{2,0}$ este dispersia variabilei aleatoare ξ; iar momentul centrat $\mu_{0,2}$ este dispersia variabilei aleatoare η. *Formulele de calcul a dispersiilor* sunt:

$$D\xi = \sum\sum (x_i - m_\xi)^2 p_{ij} \ , \ D\eta = \sum\sum (y_j - m_\eta)^2 p_{ij} \ . \qquad (4.21)$$

Dispersiile pot fi calculate şi pe baza repartițiilor marginale:

$$D\xi = \sum (x_i - m_\xi)^2 p_{x_i} \ , \ D\eta = \sum (y_j - m_\eta)^2 p_{y_j} \ . \qquad (4.22)$$

Abaterile medii pătratice ale variabilelor ξ şi η se definesc prin egalitățile

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} \ , \ \sigma_\eta = \sqrt{D_\eta} \ . \qquad (4.23)$$

Definiție. Momentul centrat de ordinul 1+1 se numeşte *covarianța* sau *momentul de corelație* al sistemului de variabile aleatoare.

Covarianța unui sistem de variabile aleatoare (ξ, η) se notează cu $C_{\xi\eta}$, sau cu cov(ξ, η). *Formula de calcul a covarianției* este

$$C_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - m_\xi)(y_j - m_\eta) p_{ij} \ . \qquad (4.24)$$

Dacă $C_{\xi\eta} = 0$, atunci se spune că variabilele aleatoare ξ şi η sunt *necorelate*. Dacă însă $C_{\xi\eta} \neq 0$, atunci se spune că ξ şi η sunt *corelate*. Au loc egalitățile

$$C_{\xi\eta} = C_{\eta\xi} \ , \ C_{\xi\xi} = D_\xi, \ C_{\eta\eta} = D_\eta. \qquad (4.25)$$

Matricea

$$Cov(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} C_{\xi\xi} & C_{\xi\eta} \\ C_{\eta\xi} & C_{\eta\eta} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

se numeşte *matrice a covarianţelor*.

Definiţie. Se numeşte *coeficient de corelaţie* a unui sistem de variabile aleatoare (ξ, η) mărimea, notată cu $r_{\xi\eta}$ (sau $k_{\xi\eta}$) şi definită prin egalitatea

$$r_{\xi\eta} = \frac{C_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \tag{4.27}$$

Matricea

$$K = \begin{pmatrix} r_{\xi\xi} & r_{\xi\eta} \\ r_{\eta\xi} & r_{\eta\eta} \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

se numeşte *matrice a corelaţiilor*.

Propozitie (*Proprietăţile coeficientului de corelaţie)*. *Coeficientul de corelatie $r_{\xi\eta}$ are următoarele proprietăţi:*

1) dacă variabilele aleatoare ξ şi η sunt independente, atunci $r_{\xi\eta}=0$;

2) are loc relaţia $-1 \le r_{\xi\eta} \le 1$;

3) dacă $r_{\xi\eta} = 1$, atunci între ξ şi η există, cu probabilitatea 1, o dependenţă funcţională liniară de formă $\eta = a\xi + b$, unde $a > 0$;

4) dacă $r_{\xi\eta} = -1$, atunci între η şi ξ există, cu probabilitatea 1, o dependenţă funcţională liniară de forma $\eta = a\xi + b$, unde $a < 0$;

5) dacă între η şi ξ există, cu probabilitatea 1, o dependenţă funcţională liniară de forma $\eta = a\xi + b$,atunci $|r_{\xi\eta}| =1$;

6) dacă $r_{\xi\eta} = 0$, atunci de aici nu rezultă că variabilele η şi ξ sunt independente. Rezultă doar faptul că ξ şi η sunt necorelate, adică între ξ şi η nu există o dependenţă funcţională. O altă dependenţă este posibilă;

7) au loc egalităţile $r_{\xi\xi} = r_{\eta\eta} =1$.

Remarcă. Reciproca proprietăţii 1) nu are loc deoarece poate fi adus un Contraexemplu de 2 v.a. dependente, dar coeficientul lor de corelaţie să fie diferit de zero.

4.3.5. Exemplu de determinare a caracteristicilor numerice

Exemplul 2. Se dă un sistem de variabile aleatoare (ξ, η) prin matricea sa de repartiţie(Tabelul 4.2):

Tabelul 4.2 Sistem de variabile aleatoare prin matricea de repartiție

$\xi \backslash \eta$	10	15	20	25
5	*a*	0,10	0	0
10	0	0,2	0,10	0,05
15	0	0,05	0,15	0,20

Se cere : 1) să se definească (introducă) în Sistemul Mathematica sistemul de v.a. dat; 2) să se determine constanta *a*; 3) să se introducă în Sistemul Mathematica sistemul de v.a. dat cu precizarea valorii parametrului *a*; 4) să se calculeze valorile medii m_ξ şi m_η; 5) să se calculeze dispersiile D_ξ şi D_η; 6) să se calculeze abaterile medii pătratice σ_ξ şi σ_η; 7) să se calculeze covariația $C_{\xi\eta}$; 8) să se calculeze coeficientul de corelație $r_{\xi\eta}$; 9) să se scrie matricea covariațiilor; 10) să se scrie matricea corelațiilor.

Rezolvare. 1) Introducem sistemul de v.a. (ξ, η) în Sistemul Mathematica în formă de o listă elementele căreia sunt liste ale elementelor din liniile tabelului 4.2, pe care o notăm cu **pξη.**

Scriem lista **pξη** în formă de matrice

```
In[k2+1] :=
  pξη = {{0, 10, 15, 20, 25}, {5, a, 0.1, 0, 0},
    {10, 0, 0.2, 0.1, 0.05}, {15, 0, 0.05, 0.15, 0.2}}
```

Scriem lista **pξη** în formă de matrice

```
In[k2+2] := MatrixForm[pξη]
```

$$\text{Out[k2+2]} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 5 & a & 0.1` & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0.2` & 0.1` & 0.05` \\ 15 & 0 & 0.05` & 0.15` & 0.2` \end{pmatrix} \qquad (4.29)$$

Am obținut matricea **pξη**. Trebuie să avem în vedere care elemente din această matrice sunt valorile posibile ale variabilelor aleatoare şi care sunt probabilități.

2) Determinăm constanta *a* din condiția (4.8).

$$\text{In[k2+3] := Solve}\left[\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=2}^{5} p\xi\eta[[i, j]] == 1, a\right]$$

```
Out[k2+3] = {{a → 0.15}}
```

Am obținut a = 0,15.

3) Scriem matricea (4.29) cu valoarea determinată a parametrului *a* şi notăm matricea obţinută cu **p.**

```
In[k2 + 4] :=
  p = {{0, 10, 15, 20, 25}, {5, 0.15, 0.1, 0, 0},
    {10, 0, 0.2, 0.1, 0.05}, {15, 0, 0.05, 0.15, 0.2}}
Out[k2 + 4] =
  p = {{0, 10, 15, 20, 25}, {5, 0.15, 0.1, 0, 0},
    {10, 0, 0.2, 0.1, 0.05}, {15, 0, 0.05, 0.15, 0.2}}
```

Scriem lista **p** în formă de matrice

```
In[k2 + 5] := MatrixForm[p]
```

$$\text{Out[k2 + 5]} = p = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 5 & 0.15 & 0.1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 15 & 0 & 0.05 & 0.15 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad (4.29^1)$$

Am obţinut matricea **p**.

4) Calculăm speranţele matematice m_ξ şi m_η conform formulelor (4.17).

$$\text{In[k2 + 6]} := m_\xi = \sum_{i=2}^{4} p[[i, 1]] \sum_{j=2}^{5} p[[i, j]]$$

Out[k2 + 6] = 10.75

$$\text{In[k2 + 7]} := m_\eta = \sum_{j=2}^{5} p[[1, j]] \sum_{i=2}^{4} p[[i, j]]$$

Out[k2 + 7] = 18.

Am obţinut speranţele matematice $m_\xi = 10{,}75$ şi $m_\eta = 18$.

5) Calculăm dispersiile conform formulelor (4.21).

$$\text{In[k2 + 8]} := D_\xi = \sum_{i=2}^{4} (p[[i, 1]] - m_\xi)^2 \sum_{j=2}^{5} p[[i, j]]$$

Out[k2 + 8] = 15.6875

$$\text{In[k2 + 9]} := D_\eta = \sum_{j=2}^{5} (p[[1, j]] - m_\eta)^2 \sum_{i=2}^{4} p[[i, j]]$$

Out[k2 + 9] = 26.

Am obţinut dispersiile $D_\xi = 15{,}6875$ şi $D_\eta = 26$.

6) Calculăm abaterile medii pătratice conform formulelor (4.23)

In[k2+10] := $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$

Out[k2+10] = 3.96074

In[k2+11] := $\sigma_\eta = \sqrt{D_\eta}$

Out[k2+11] = 5.09902

Am obținut σ_ξ = 3,96074 şi σ_η= 5,09902;

7) Calculăm covariația conform formulei (4.24)

In[k2+12] :=

$$C_{\xi\eta} = \sum_{i=2}^{4}\sum_{j=2}^{5}(p[[i,1]] - m_\xi)\,(p[[1,j]] - m_\eta)\,p[[i,j]]$$

Out[k2+12] = 15.25

8) Calculăm coeficientul de covariație. Aplicăm formula (4.27)

In[k2+13] := $r_{\xi\eta} = \dfrac{C_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\,\sigma_\eta}$

Out[k2+13] = 0.755103

9) Scriem matricea covariațiilor (4.26),.

In[k2+14] := $Cov(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} D_\xi & C_{\xi\eta} \\ C_{\xi\eta} & D_\eta \end{pmatrix}$ **// MatrixForm**

Out[k2+14] = $\begin{pmatrix} 15.6875 & 15.25 \\ 15.25 & 26. \end{pmatrix}$

10) Scriem matricea corelațiilor conform (4.28).

In[k2+15] := $Kor(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 1 & r_{\xi\eta} \\ r_{\xi\eta} & 1 \end{pmatrix}$ **// MatrixForm**

Out[k2+15] = $\begin{pmatrix} 1 & 0.755103 \\ 0.755103 & 1 \end{pmatrix}$

Rezolvarea Exemplului 2 s-a terminat.

Exemplul 3. Fiind dat sistemul de variabile aleatoare (ξ,η) definit în Exemplul 2 prin matricea (Tabelul 4.2), se cere : 1) să se determine repartițiile marginale ale v.a.d. ξ şi η; 2) să se determine dacă v.a.d. ξ şi η din sistemul (ξ, η) sunt independente sau nu.

Rezolvare. 1) Repartițiile marginale pot fi determinate conform formulelor (4.10) – (4.15). Definim doi vectori **x** şi **y**, coordonatele cărora sunt valorile posibile ale v.a. ξ şi, respectiv η.

In[k4+1] := x = {5, 10, 15}

Out[k4+1] = {5, 10, 15}

In[k4+2] := y = {10, 15, 20, 25}

```
Out[k4 + 2] = {10, 15, 29, 25}
```

Definim matricea **pxy** elementele căreia sunt probabilitățile din matricea **p**.

```
In[k4 + 3] :=
 pxy = {{0.15, 0.1, 0, 0}, {0, 0.2, 0.1, 0.05},
   {0, 0.05, 0.15, 0.2}}
Out[k4 + 3] = {{0.15, 0.1, 0, 0}, {0, 0.2, 0.1, 0.05},
  {0, 0.05, 0.15, 0.2}}
```

Scriem matricea **pxy** în formă matriceală.

```
In[k4 + 4] := MatrixForm[pxy]
```

Out[k4 + 4] = $\begin{pmatrix} 0.15 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.15 & 0.2 \end{pmatrix}$

Determinăm probabilitățile coordonatelor vectorilor **x** şi **y**.

```
In[k4 + 5] := px = Apply[Plus, pxy, 1]
Out[k4 + 5] = {0.25, 0.35, 0.4}
In[k4 + 6] := py = Apply[Plus, Transpose[pxy], 1]
Out[k4 + 6] = {0.15, 0.35, 0.25, 0.25}
```

Scriem repartițiile marginale în formă matriceală.

```
In[k4 + 7] := {x, px} // MatrixForm
```

Out[k4 + 7] := $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0.25 & 0.35 & 0.4 \end{pmatrix}$

```
In[k4 + 8] := {y, py} // MatrixForm
```

Out[k4 + 8] = $\begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 & 25 \\ 0.15 & 0.35 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$

Am obținut repartițiile marginale ale variabilelor ξ şi ηț

2) Conform teoriei trebuie verificate egalitățile (4.14). Construim matricea **pxipyj** elementele căreia sunt $p_{x_i} p_{y_j}$, înmulțind în prealabil, separat, fiecare probabilitate p_{x_i} din repartiția marginală a lui ξ cu probabilitățile din repartiția marginală a lui η. Astfel creând liniile matricei **pxipyj**.

```
In[k4 + 9] := px1py = px[[1]] py
Out[k4 + 9] = {0.0375, 0.0875, 0.0625, 0.0625}
In[k4 + 10] := px2py = px[[2]] py
Out[k4 + 10] = {0.0525, 0.1225, 0.0875, 0.0875}
In[k4 + 11] := px3py = px[[3]] py
```

```
Out[k4 + 11] = {0.06, 0.14, 0.1, 0.1}
```

Scriem liniile matricei **pxipyj** în forma matriceală.

```
In[k4 + 12] := pxipuj = MatrixForm[{px1py, px2py, px3py}]
```

$$\text{Out[k4 + 12]} = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.0875 & 0.0625 & 0.0625 \\ 0.0525 & 0.1225 & 0.0875 & 0.0875 \\ 0.06 & 0.14 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Scriem alături şi matricea **pxy** alcătuită din probabilităţile sistemului (ξ, η):

$$\text{pxy} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.15 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că elementele acestor matrice nu coincid. Tragem concluzia că v.a. ξ şi η din sistemul (ξ, η) dat în exemplul 2 sunt dependente.

Rezolvarea exemplului 3 s-a terminat.

4.3.6. Repartiţii condiţionate

Definiţie. Prin *repartiţie condiţionată* a unei variabile aleatoare discrete din sistemul (ξ, η) se înţelege repartiţia acestei variabile cu condiţia că cealaltă variabilă ia o valoare concretă.

Fie (ξ, η) un sistem de variabile aleatoare discrete cu matricea de repartiţie (Tabelul 4.1). Vom stabili o regulă de determinare a repartiţiilor condiţionate ale variabilelor ξ şi η.

Din formula de înmulţire a probabilităţilor avem:

$$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P(\eta = y_j)P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = p_{y_j} \cdot P(\xi = x_i \mid \eta = y_j).$$

Notând cu $p_{x_i|y_j}$ probabilitatea că $\xi = x_i$ cu condiţia că $\eta = y_j$:

$$p_{x_i|y_j} = P(\xi = x_i \mid \eta = y_j),$$

din egalitatea precedentă obţinem:

$$p_{x_i|y_j} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.30)$$

Deci *repartiţia variabilei aleatoare* ξ *condiţionată de* $\eta = y_j$ este

$$\xi \mid y_j : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_{x_1|y_j} & p_{x_2|y_j} & \ldots & p_{x_m|y_j} \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, \ldots, n. \quad (4.31)$$

Asemănător se arată că repartiţia variabilei aleatoare η condiţionată de evenimentul $\xi = x_i$ este:

$$\eta\big|x_i: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ p_{y_1|x_i} & p_{y_2|x_i} & \dots & p_{y_n|x_i} \end{pmatrix}, i = 1, 2,\dots, m, \qquad (4.32)$$

unde

$$p_{y_j|x_i} = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}}, i = 1, 2,\dots, m; j = 1, 2,\dots, n. \qquad (4.33)$$

4.3.7. Caracteristice numerice ale v.a. condiționate

Caracteristicile numerice ale variabilelor ξ şi η calculate pe baza repartițiilor condiționate (4.31) şi (4.32) se numesc *caracteristici numerice ale v.a. condiționate*.

Definiție. Se numeşte *valoare medie condiționată* a unei v.a. din sistemul (ξ, η) valoarea medie a uneia din v.a. calculată cu condiția că cealaltă variabilă aleatoare ia o valoare concretă.

Valoarea medie a variabilei ξ condiționată de evenimentul $\eta = y_j$ se notează cu $M[\xi\,|\,y_j]$, $j = 1, 2,\dots, n$, iar valoarea medie a variabilei η condiționată de evenimentul $\xi = x_i$ se notează cu $M[\eta\,|\,x_i]$, $i = 1, 2,\dots, m$. Din definiția precedentă, (4.31), (4.32) şi formula de calcul a valorii medii rezultă că:

$$M[\xi\big|y_j] = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{x_i|y_j}, j = 1, 2,\dots, n; \qquad (4.34)$$

$$M[\eta\big|x_i] = \sum_{j=1}^{n} y_j p_{y_j|x_i}, i = 1, 2,\dots, m. \qquad (4.35)$$

Cum în definițiile momentelor inițiale şi a momentelor centrate ale unui sistem de variabile aleatoare se conține noțiunea *valoare medie,* pot fi definite şi momentele respective condiționate.

4.3.8. Noțiune de regresie

Definiție. Se numeşte *regresie a variabilei aleatoare* ξ *în raport cu* η funcția $x = M[\xi \mid y]$ definită pe mulțimea valorilor posibile ale lui η. Se numeşte *regresie a variabilei aleatoare* η *în raport cu* ξ funcția $y = M[\eta \mid x]$ definită pe mulțimea valorilor posibile ale lui ξ.

Exemplul 4. Fiind dat s.v.a.d. (ξ,η) definit în exemplul 2 prin matricea (Tabelul 4.2), să se determine : 1) repartiția v.a.d. ξ condiționată de evenimentul $(\eta=10)$; 2) repartiția v.a.d. η condiționată de evenimentul (ξ=15) ; 3) valoarea medie condiționată a v.a.d. ξ ; 4) valoarea medie condiționată a v.a.d. η ; 5) să se determine în formă de matrice funcția de regresie a v.a.d. ξ ; 6) să se determine în formă de matrice funcția de regresie a v.a.d. ξ ; 7) linia de regresie a v.a.d. ξ în raport cu η; 8) linia de regresie a v.a.d. η în raport cu ξ.

Rezolvare. 1) Determinăm repartiția v.a.d. ξ condiționată de evenimentul (η=10). Notăm lista probabilităților din această repartiție cu **ξ10**.

In[k3+1] := $\xi 10 = \text{Table}\left[\frac{p[[i,2]]}{\sum_{i=2}^{4} p[[i,2]]}, \{i,2,4\}\right]$

Out[k3+1] = {1., 0, 0}

Scriem repartiția condiționată obținută în formă de matrice.

In[k3+2] := {x, ξ10} // MatrixForm

Out[k3+2] = $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 1. & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Determinăm repartiția v.a.d. η condiționată de evenimentul (ξ=15). Notăm lista probabilităților din această repartiție cu **η15**.

In[k3+3] := $\eta 15 = \text{Table}\left[\frac{p[[4,j]]}{\sum_{j=2}^{5} p[[4,j]]}, \{j,2,5\}\right]$

Out[k3+3] = {0, 0.125, 0.375, 0.5}

Scriem repartiția condiționată obținută în formă de matrice.

In[k3+4] := {y, η15} // MatrixForm

Out[k3+4] = $\begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 & 25 \\ 0 & 0.125` & 0.375` & 0.5` \end{pmatrix}$

3) Determinăm speranțele matematice condiționate ale v.a.d. ξ și notăm cu **mξη** lista lor.

In[k3+5] := $m\xi\eta = \text{Table}\left[\frac{\sum_{i=2}^{4} p[[i,1]]\, p[[i,j]]}{\sum_{i=2}^{4} p[[i,j]]}, \{j,2,5\}\right]$

Out[k3+5] = {5., 9.28571, 13., 14.}

4) Determinăm speranțele matematice condiționate ale v.a.d. η și notăm cu **mηξ** lista lor

In[k3+6] := $m\eta\xi = \text{Table}\left[\frac{\sum_{j=2}^{5} p[[1,j]]\, p[[i,j]]}{\sum_{j=2}^{5} p[[i,j]]}, \{i,2,4\}\right]$

Out[k3+6] = {12., 17.8571, 21.875}

5) Scriem în formă de matrice funcția de regresie a v.a.d. ξ.

In[k3+7] := {y, mξη} // MatrixForm

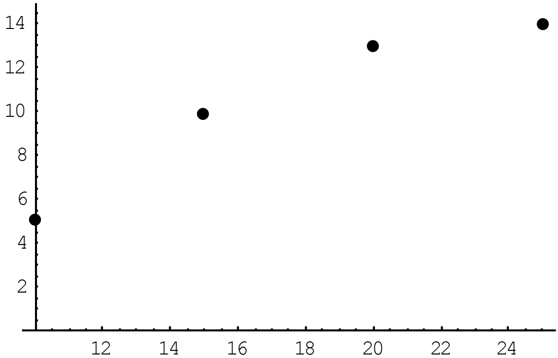
```
Out[k3+7] = ( 10  15       20   25  )
            ( 5.  9.28571  13.  14. )
```

6) Scriem în formă de matrice funcția de regresie a v.a.d. η.

```
In[k3+8] := {x, mηξ} // MatrixForm
Out[k3+8] = ( 5    10       15     )
            ( 12.  17.8571  21.875 )
```

7) Construim linia de regresie a v.a.d. ξ în raport cu η.

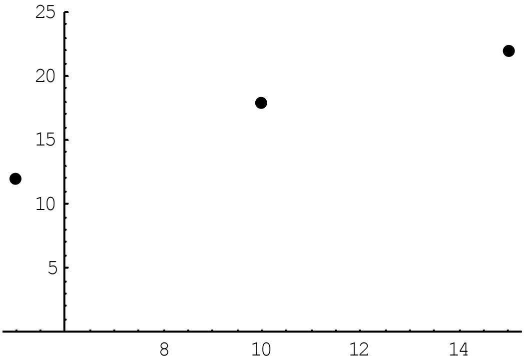
```
In[k3+9] :=
 ListPlot[{{10, 5}, {15, 9.8571}, {20, 13}, {25, 14}},
  PlotRange→ {0, 15}, PlotStyle→ PointSize[0.025]]
```




```
Out[k3+9] = - Graphics -
```

8) Construim linia de regresie a v.a.d. η în raport cu ξ.

```
In[k3+10] := ListPlot[{{5, 12}, {10, 17.8571}, {15, 21.875}},
  PlotRange→ {0, 25}, PlotStyle→ PointSize[0.025]]
```




```
Out[k3+10] = - Graphics -
```

Rezolvarea exemplului s-a terminat. Scoatem valorile atribuite notațiilor în exemplele 2, 3 şi 4. Aceasta trebuie efectuat, deoarece în careva din exemplele următoare aceste notații se vor folosi iarăşi, dar vor reprezenta alte entități.

Clear[pξη,a,p,m_ξ,m_η,D_ξ,D_η,σ_ξ,σ_η,$C_{\xi\eta}$,$r_{\xi\eta}$,Cov(ξ,η),Kor(ξ,η),x,y,pxy, px,py,px1py,px2py,px3py,pxipyj,ξ10,η15,mξη,mηξ].Δ

4.4. Vectori aleatori continui (v.a.c.)

4.4.1. Noțiuni generale

Dacă v.a. ξ şi η, care formează sistemul (ξ, η), sunt v.a. de tip (absolut) continue, atunci se spune că (ξ, η) este un *sistem de variabile aleatoare de tip (absolut)continue,* prescurtat*, s.v.a.c.*

Unele noțiuni referitoare la un s.v.a.d. sunt comune şi pentru un s.v.a.c. Aşa sunt noțiunile de f.r., funcții de repartiție marginale, funcții de repartiție condiționate, momentele inițiale, momentele centrate, regresia. Aceste noțiuni au fost definite în punctele precedente. De aceea nu vom repeta aici aceste definiții, dar vom defini valoarea medie, vom face unele precizări, care rezultă din faptul că (ξ, η) este un s.v.a.c. şi vom scrie formulele de calcul ale momentelor.

În cele ce urmează vom considera că (ξ, η) este un s.v.a.c. şi funcția de repartiție $F(x, y)$ a acestui sistem este continuă împreună cu derivatele parțiale

$$\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\ \text{şi}\ \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}.$$

4.4.2. Densitatea de repartiție (d.r.) şi proprietățile acesteia

Prin definiție**,** *Densitatea de repartiție* (*în ansamblu)* a unui sistem de variabile aleatoare continue (ξ, η) cu funcția de repartiție $F(x, y)$ este funcția $f(x,y)$ definită prin formula

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \qquad (4.36)$$

Densitatea de repartiție are proprietățile ce urmează.

1) $f(x,y) \geq 0,\ \forall (x,y)\in\mathbf{R}^2$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1.$ (4.37)

4.4.3. Probabilitatea ca un punct aleator (ξ, η) să aparțină unui domeniu mărginit şi închis D

Se calculează conform formulei

$$P[(\xi, \eta) \in D] = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \quad . \tag{4.38}$$

4.4.4. Funcția de repartiție exprimată prin densitatea de repartiție

Funcția de repartiție a unui sistem de variabile aleatoare continue se exprimă prin densitatea de repartiție conform formulei

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy \quad . \tag{4.39}$$

4.4.5. Exprimarea funcțiilor de repartiție marginale prin densitatea de repartiție a sistemului

Cum $F_\xi(x) = F(x, \infty)$ şi $F_\eta(y) = F(\infty, y)$, din (4.36) rezultă:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad ,$$

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dy \quad . \tag{4.40}$$

Formulele (4.40) sunt *formulele de exprimare a funcțiilor de repartiție marginale prin densitatea de repartiție a sistemului.*

4.4.6. Exprimarea densităților de repartiție marginale prin densitatea de repartiție a sistemului

Densitățile de repartiție marginale $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$ se obțin, prin derivare, din funcțiile de repartiție marginale:

$$f_\xi(x) = \frac{\partial F_\xi}{\partial x}(x)\ , \quad f_\eta(y) = \frac{\partial F_\eta}{\partial y}(y)\ . \tag{4.41}$$

Din (4.40) şi (4.41), ținând cont de regula de derivare a integralei în raport cu limita superioară de integrare, obținem:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad , \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \quad . \tag{4.42}$$

4.4.7. Formule de calcul pentru caracteristicile numerice ale unui s.v.a.c

Din formula de calcul a valorii medii a unei variabile aleatoare continue rezultă că

$$M\xi = \int x\, f_\xi(x)\, dx\ , \ M\eta = \int y\, f_\eta(y)\, dy\ . \tag{4.43}$$

Formulele de calcul ale valorilor medii exprimate prin densitatea de repartiție a sistemului sunt:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy\ , \quad M\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy \tag{4.44}$$

Momentele inițiale şi momentele centrate pot fi calculate cu ajutorul formulelor

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)\,dx\,dy\ , \tag{4.45}$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_\xi)^k (y-m_\eta)^s f(x,y)\,dx\,dy\ . \tag{4.46}$$

În particular, dispersiile şi covarianța se calculează conform formulelor:

$$D\xi = \int\int (x-m_\xi)^2 f(x,y)\,dx\,dy\ , \tag{4.47}$$

$$D\eta = \int\int (y-m_\eta)^2 f(x,y)\,dx\,dy\ , \tag{4.48}$$

$$C_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_\xi)(y-m_\eta) f(x,y)\,dx\,dy\ . \tag{4.49}$$

Formulele da calcul ale abaterilor medii pătratice şi ale coeficientului de corelație sunt cele din paragraful 4.2.

Dispersiile pot fi calculate şi pe baza densităților de repartiție marginale. În acest caz avem:

$$D\xi = \int (x-m_\xi)^2 f_\xi(x)\,dx\ , \ D\eta = \int (y-m_\eta)^2 f_\eta(y)\,dy\ . \quad (4.50$$

4.4.8. Variabile aleatoare independente

Variabilele ξ şi η din sistemul (ξ, η) sunt independente atunci şi numai atunci, când d.r.

$$f(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y) \text{ sau f.r. } F(x,y) = F_\xi(x) F_\eta(y)\ . \tag{4.51}$$

4.4.9. Densitate de repartiție condiționată

Notăm cu $f_\xi(x\,|\,y)$ densitatea de repartiție a variabilei aleatoare ξ cu condiția că η ia valoarea y şi cu $f_\eta(y\,|\,x)$ densitatea de repartiție a variabilei aleatoare η cu condiția că ξ ia valoarea x. Au loc egalitățile :

$$f_\xi(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}\ , \quad f_\eta(y\,|\,x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}\ , \tag{4.52}$$

Şi, deci, ţinând cont de (4.42), obţinem

$$f_{\xi}(x|y)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}\,,\quad f_{\eta}(y|x)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}\,. \qquad (4.53)$$

4.4.10. Caracteristici numerice condiţionate. Regresia

Din definiţia d.r. condiţionate definite mai sus şi formula de calcul a valorii medii a unei v.a. continue rezultă că:

$$M[\xi|y]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{\xi}(x|y)\,dx\,,$$

$$M[\eta|x]=\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{\eta}(y|x)\,dy\,. \qquad (4.54)$$

Graficul funcţiei $M[\xi \mid y]$, ca functie de argumentul *y*, se numeşte *linie de regresie* a variabilei ξ în η, iar graficul funcţiei $M[\eta \mid x]$, ca functie de argumentul *x*, se numeşte *linie de regresie* a variabilei η în ξ. Evident, că dacă variabilele ξ şi η sunt independente, atunci liniile de regresie reprezintă două funcţii constante, egale, respectiv, cu $M\xi$, $M\eta$.

4.4.11. Exemple

Exemplul 5. Se dă d.r. în ansamblu a s.v.a.c. (ξ, η) :

$$f(x,y)=a\cdot e^{-4x^2-2xy-5y^2}\,,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

Se cere : 1) să se determine constanta *a* ; 2) să se introducă (definească) d.r. în ansamblu în Sistemul Mathematica ; 3) să se construiască graficul d.r. în ansamblu; 4) să se calculeze probabilitatea ca s.v.a. să ia valori din dreptunghiul

$$R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0\le x\le 1\ ;\ 0\le y\le 1{,}5\}\ ;$$

5) să se determine d.r. marginale ale variabilelor ξ şi η ;
6) să se determine dacă v.a. ξ şi η sunt dependente sau independente.

Rezolvare. 1) Determinăm constanta *a* din condiţia (4.37).

In[k5+1] := $\mathbf{Solve}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a*Exp}[-4x^2-2x*y-5y^2]\,dx\,dy == 1,\ \mathbf{a}\right]$

Out[k5+1] = $\left\{\left\{\mathbf{a}\to\frac{\sqrt{19}}{\pi}\right\}\right\}$

Am obținut a = $\frac{\sqrt{19}}{\pi}$. Deci d.r. în ansamblu a sistemului (ξ, η) este

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{19}}{\pi} e^{-4x^2-2xy-5y^2}, \ (x,y)\in\mathbf{R}^2. \tag{4.55}$$

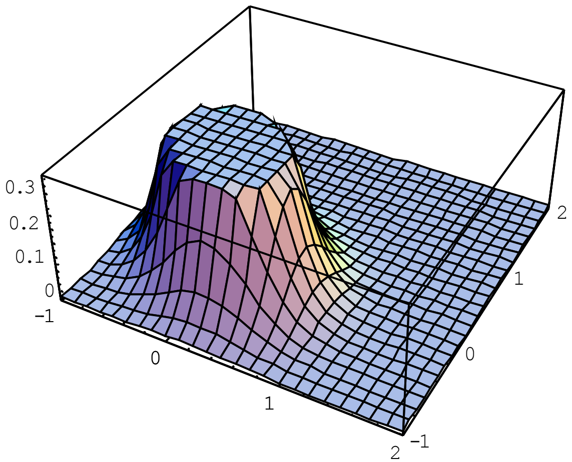
2) Introducem d.r. in ansamblu (4.55) în Sistemul Mathematica.

In[k5+2] := f[x_, y_] = $\frac{\sqrt{19}}{\pi} e^{-4x^2-2x*y-5y^2}$

Out[k5+2] = $\frac{\sqrt{19}\, e^{-4x^2-2xy-5y^2}}{\pi}$

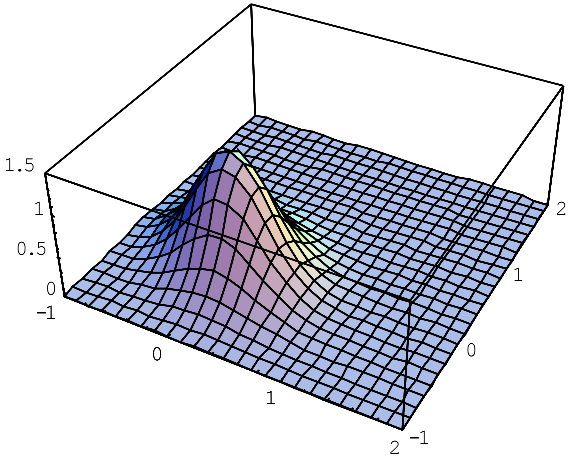
3) Construim graficul funcției $f(x,y)$ folosind funcția **Plot3D.**

```
In[k5+3] := Plot3D[f, {x, -1, 2}, {y, -1, 2}]
Out[k5+3] = - SurfaceGraphics -
```



Observăm că o parte din graficul funcției $f(x,y)$, şi anume punctele care au a treia coordonată mai mare ca 0,3, nu este reprezentată pe desen. De aceea vom folosi o opțiune specială a funcției **Plot3D**, care impune valori dorite pe axa *Oz*. Având în vedere că valoarea maximă a funcției $f(x,y)$ nu depăşeşte $\sqrt{19}/\pi < 1.5$, vom cere ca pe axa Oz să fie indicate valorile de la 0 până la 1,5. Aceasta se poate face cu ajutorul funcției **PlotRange.**

```
In[k5+4] := Plot3D[f, {x, -1, 2}, {y, -1, 2},
  PlotRange→ {0, 1.5}]
```



4) Calculăm probabilitatea ca s.v.a. să primească valori din dreptunghiul R cu ajutorul formulei (4.38).

Am obținut $P((\xi,\eta)\in R) = 0{,}213882$.

5) Determinăm d.r. marginale cu ajutorul formulelor (4.42).

Am obținut repartițiile marginale

$$f_\xi(x) = \sqrt{\frac{19}{5\pi}}\, e^{-19x^2/5} \quad , \quad f_\eta(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{\pi}}\, e^{-19x^2/4} .$$

6) Pentru a determina dependența sau independența v.a. ξ și η folosim egalitatea (4.51) pentru d.r. Calculăm produsul densităților de repartițe marginale.

Cum produsul obținut nu coincide cu d.r. în ansamblu $f(x,y)$, rezultă că v.a. ξ și η sunt dependente.

Rezolvarea exemplului 5 s-a terminat.

Exemplul 6. Fiind dat s.v.a.c (ξ, η) definit în exemplul 5 prin d.r. în ansamblu (4.55), să se determine: 1) valorile medii m_ξ și m_η; 2) dispersiile D_ξ și D_ξ; 3) abaterile medii pătratice σ_ξ și σ_ξ; 4) covarianța $C_{\xi\eta}$; 5) coeficientul de corelație $r_{\xi\eta}$; 6) matricea covarianțelor Cov[ξ,η] ; 7) matricea corelațiilor K.

Rezolvare. 1) Pentru calculul speranțelor matematice folosim densitățile de repartiții marginale, determinate în exemplul precedent, şi formulele (4.43).

Am obținut valorile medii $m_\xi = 0$ şi $m_\eta = 0$.

2) Pentru calculul dispersiilor folosim repartițiile marginale şi formulele (4.50).

Am obținut dispersiile $D_\xi = 5/38$ şi $D_\xi =2/19$.

3) Determinăm abaterile medii pătratice ca rădăcinile pătratice din dispersii.

Am obținut abaterile medii pătratice $\sigma_\xi = \sqrt{5/38}$ şi $\sigma_\eta = \sqrt{2/19}$.

4) Determinăm covarianța folosind d.r. în ansamblu $f(x,y)$ dată prin formula (4.55) şi formula (4.49).

Am obținut valoarea covarianței $C_{\xi\eta} = -1/38$.

5) Calculăm coeficientul de corelație conform formulei (4.27).

Am obținut coeficientul de corelație $r_{\xi\eta} = -1/2\sqrt{5}$.

6) Determinăm matricea covarianțelor conform formulei (4.26).

7) Determinăm matricea corelațiilor prin formula (4.28).

Rezolvarea exemplului 6 s-a terminat.

Exemplul 7. Fiind dat s.v.a.c. (ξ, η) din exemplul 5, să se determine : 1) d.r. a v.a. ξ condiționată de evenimentul $\eta = y$; 2) d.r. a v.a. η condiționată de evenimentul $\xi = x$; 3) funcția de regresie a v.a. ξ în raport cu η ; 4) funcția de regresie a v.a. η în raport cu ξ; 5) liniile de regresie.

Rezolvare. Datele şi rezultatele intermediare ale exemplului au fost introduse în Sistemul Mathematica în exemplele 5 şi 6. Folosim unele din ele la rezolvarea exemplului dat.

1) Pentru determinarea d.r. a v.a. ξ condiționată de evenimentul $\eta = y$ folosim prima din formulele (4.51).

Am obținut densitatea de repartiție a v.a. ξ condiționată de evenimentul $\eta=y$:

$$f_\xi(x \mid y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2 - 2xy - y^2/4}.$$

2) Pentru determinarea densității de repartiție a v.a. η condiționată de evenimentul $\xi = x$ folosim a doua din formulele (4.51).

Am obținut densitatea de repartiție a v.a. η condiționată de evenimentul ξ=x:

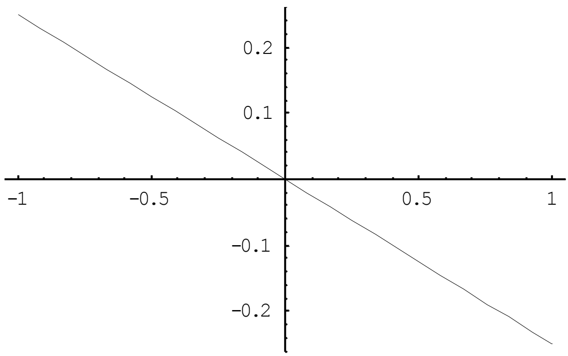
$$f_{\eta}(y \mid x) = \sqrt{\frac{5}{\pi}}\, e^{-x^2/5-2xy-5y^2} .$$

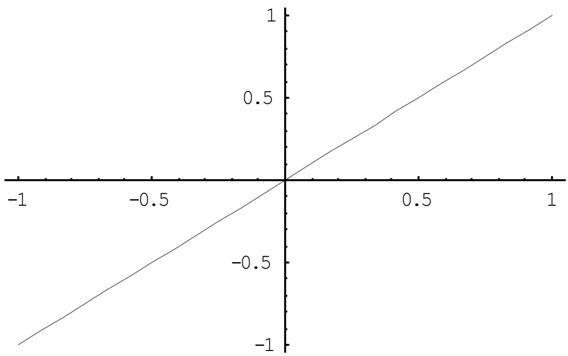
3) Pentru a determina funcția de regresie a v.a. ξ în raport cu η, pe care o notăm cu **Mξ[y]**, aplicăm prima din formulele (4.53).
Am obținut funcția de regresie a v.a. ξ în raport cu η: $x = y/4$.

4) Pentru a determina funcția de regresie a v.a. η în raport cu ξ aplicăm a doua din formulele (4.53).

Am obținut funcția de regresie a v.a. η în raport cu ξ: $y = x$.

5) Construim liniile de regresie ca grafice ale funcțiilor de regresie.





Rezolvarea exemplului 7 s-a terminat.

4.4.12. Teorema Limită Centrală și Legea Numerelor Mari pentru variabile aleatoare independente, identic repartizate (v.a.i.i.r)

Teorema Limită Centrală (TLC) şi Legea Numerelor Mari (LNM) reprezintă rezultatele de vârf din Teoria Probabilităților. Astfel, TLC vine să generalizeze Teorema Limită Centrală (forma Moivre-Laplace, sec.XIX)), privind calculul valorilor aproximative ale probabilității din schema (repartiția) Binomială, extinzând-o şi asupra unor repartiții diferite de cea Binomială. LNM, care este, de fapt, consecința a TLC, serveste în calitate de model matematic pentru aplicarea Principiului Regularității Statistice.

Teorema Limită Centrală ***(pentru v.a.i.i.r.).*** *Fie ξ_1, ξ_2,…, ξ_n ,… un şir de v.a.i.i.r. cu media M ξ_i=a şi dispersia D $\xi_i=\sigma^2$, i=1,2,…, atunci, pentru $n\to\infty$, probabilitatea*

$$P[(\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n - n\cdot a)/\sigma\sqrt{n} < x] \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt .$$

Consecința 1. *În condițiile TLC pentru v.a.i.i.r., atunci când n este suficient de mare are loc aproximarea următoare:*

$$P(\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n < a) \approx \Phi(\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}).$$

Consecința 2. ***(LNM pentru v.a.i.i.r.).*** *În condițiile TLC pentru v.a.i.i.r., atunci când $n\to\infty$ are loc convergența următoare*

$$P(\left| (\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n)/n - a \right| < \varepsilon) \to 1$$

pentru orice ε>0, oricât de mic ar fi acesta.

Consecința 3. *În condițiile TLC pentru v.a.i.i.r., atunci când n este suficient de mare, are loc aproximarea următoare:*

$$P(\left| (\xi_1 + \xi_2+\ldots+ \xi_n)/n - a \right| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}})-1.$$

pentru orice ε>0, oricât de mic ar fi acesta.

Consecința 4. ***(LNM în forma Bernoulli, sec. XVII).*** *Fie un experiment aleator $\mathcal{E}$, iar A un eveniment aleator pentru care p=P(A)>., Atunci, când $n\to\infty$, pentru frecvența relativă $f_n(A)$ are loc urmatoarea convergență:*

$$P(\left| f_n - p \right| < \varepsilon) \to 1,$$

pentru orice ε>0, oricât de mic ar fi acesta.

Remarcă. *Consecința 2 arată, de fapt, ca media aritmetică a n valori observate a uneia si aceleiaşi v.a. tinde, atunci cand n tinde la infinit, la o constantă egală cu valoarea medie a acestei v.a. Consecința 3 arată cum poate fi evaluată viteza de convergență menționată anterior. Consecința 4 justifică, de fapt, din punct de vedere matematic, Principiul Regularitatii Statistice.*

4.4.13. Exerciții pentru lucrul individual şi lucrări de laborator

1. Se dă f.r. a unui s.v.a. (ξ,η) definit prin f.r.

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\quad x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\quad x+\frac{1}{2}\right),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

şi un domeniu

$$D_1=\{(x,y):0\le x<1+n/5;\ 0\le y<1+n/6\},$$

unde n este numărul variantei. Să se determine: 1) graficul funcției $F(x,y)$ pe domeniul D_1; 2) probabilitatea $P((\xi,\eta)\in D_1)$.

2. Fiind dată matricea (legea) de repartiție a unui s.v.a.d. (ξ,η):

$\xi\backslash\eta$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}

să se determine: 1) constanta a; 2) valorile medii m_ξ şi m_η; 3) dispersiile D_ξ şi D_η; 4) abaterile pătratice medii σ_ξ, σ_η; 5) covarianța $C_{\xi\eta}$; 6) coeficientul de corelație $r_{\xi\eta}$; 7) matricea covarianțelor; 8) matricea corelațiilor. Valorile parametrilor sunt date pe variante.

1) x_1=20, x_2=25, x_3=30, y_1=5, y_2=10, y_3=15, y_4=20, p_{11}=a, p_{12}=0,06, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,04, p_{22}=0,2, p_{23}=0,3, p_{24}=0,05, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,15, p_{34}=0,1 ;

2) x_1=20, x_2=25, x_3=30, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, p_{11}=a, p_{12}=0,16, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,08, p_{22}=0,15, p_{23}=0,2, p_{24}=0,1, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,1, p_{34}=0,15 ;

3) x_1=15, x_2=20, x_3=25, y_1=5, y_2=10, y_3=20, y_4=25, p_{11}=a, p_{12}=0,08, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,1, p_{22}=0,15, p_{23}=0,1, p_{24}=0,06, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,16, p_{34}=0,15 ;

4) x_1=20, x_2=25, x_3=30, y_1=15, y_2=20, y_3=25, y_4=30, $p_{11}=a$, p_{12}=0,0,06, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,08, p_{22}=0,16, p_{23}=0,15, p_{24}=0,08, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,12, p_{34}=0,2 ;
5) x_1=15, x_2=20, x_3=25, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,08, p_{22}=0,2, p_{23}=0,16, p_{24}=0, p_{31}=0, p_{32}=0,06, p_{33}=0,1, p_{34}=0,1 ;
6) x_1=10, x_2=15, x_3=20, y_1=5, y_2=10, y_3=15, y_4=20, $p_{11}=a$, p_{12}=0,08, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,16, p_{22}=0,15, p_{23}=0,25, p_{24}=0,06, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,08, p_{34}=0,2 ;
7) x_1=5, x_2=10, x_3=15, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0,15, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,09, p_{22}=0,1, p_{23}=0,08, p_{24}=0,11, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,12, p_{34}=0,15 ;
8) x_1=25, x_2=30, x_3=35, y_1=5, y_2=10, y_3=15, y_4=20, $p_{11}=a$, p_{12}=0,06, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,1, p_{22}=0,2, p_{23}=0,08, p_{24}=0,1, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,15, p_{34}=0,16 ;
9) x_1=25, x_2=30, x_3=35, y_1=15, y_2=20, y_3=25, y_4=30, $p_{11}=a$, p_{12}=0,08, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,06, p_{22}=0,15, p_{23}=0,15, p_{24}=0,04, p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,14, p_{34}=0,16 ;
10) x_1=10, x_2=15, x_3=20, y_1=10, y_2=15, y_3=20, y_4=25, $p_{11}=a$, p_{12}=0,05, p_{13}=0, p_{14}=0, p_{21}=0,06, p_{22}=0,15, p_{23}=0,15, p_{24}=0,04 p_{31}=0, p_{32}=0, p_{33}=0,14, p_{34}=0,16.
În variantele 10+i se adună 2 la toate valorile posibile ale lui ξ şi ale lui η din variante i.

3. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ,η) din exerciţiul **2.**, se cere :
1) să se afle repartițiile marginale ale lui ξ şi η; 2) să se determine dacă sunt sau nu independente v.a. ξ şi η.

4. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ,η) din exerciţiul **2.**, să se determine : 1) repartiția condiționată $\xi|(\eta=y_2)$; 2) repartiția condiționată $\eta|(\xi=x_3)$; 3) valorile medii condiționate ale v.a.d. ξ ; 4) valorile medii condiționate ale v.a.d. η ; 5) funcția de regresie a variabilei ξ în raport cu η ; 6) funcția de regresie a variabilei η în raport cu ξ; 7) linia de regresie a variabilei η în raport cu ξ; 8) linia de regresie a variabilei ξ în raport cu η.

5. Se dă d.r. în ansamblu $f(x,y)$ a sistemului de variabile aleatoare (ξ, η) . Se cere : 1) să se determine constanta a ; 2) să se introducă (definească) d.r. în ansamblu în Sistemul Mathematica ; 3) să se construiască graficul d.r. în ansamblu ; 4) să se calculeze probabilitatea că s.v.a. va lua valori din dreptunghiul

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ ; 0 \le y \le 2\} \ ;$$

5) să se determine d.r. ale v.a. ξ şi η ; 6) să se determine dacă v.a. ξ şi η sunt dependente sau independente. Funcțiile $f(x,y)$ sunt date pe variante.

1) $f(x,y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

2) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-2xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

3) $f(x,y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

4) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-4xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

5) $f(x,y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

6) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-6xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

7) $f(x,y) = a \cdot e^{-x^2-2xy-6y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

8) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-2xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

9) $f(x,y) = a \cdot e^{-x^2-4xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

10) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-4xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

11) $f(x,y) = a \cdot e^{-x^2-4xy-6y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

12) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2-6xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

13) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-2xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

14) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

15) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-2xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

16) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

17) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-4xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

18) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-4xy-2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

19) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-4xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

20) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

21) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-4xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

22) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-4xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

23) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-6xy-5y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

24) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-6xy-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

25) $f(x,y) = a \cdot e^{-2x^2-2xy-y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$;

26) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2-2xy-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R^2}$.

27) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2 - 2xy - y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

28) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2 - 4xy - 4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

29) $f(x,y) = a \cdot e^{-3x^2 - 2xy - 2y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

30) $f(x,y) = a \cdot e^{-4x^2 - 6xy - 4y^2}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

6. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ, η) definit în exercițiul **5** prin d.r. în ansamblu $f(x,y)$, să se determine : 1) valorile medii m_ξ şi m_η ; 2) dispersiile D_ξ şi D_ξ ; 3) abaterile medii pătratice σ_ξ şi σ_ξ; 4) covarianța $C_{\xi\eta}$; 5) coeficientul de corelație $r_{\xi\eta}$; 6) matricea covarianțelor $\mathrm{Cov}[\xi,\eta]$; 7) matricea corelațiilor K.

7. Fiind dat sistemul de v.a. (ξ, η) din exercițiul **5**, să se determine : 1) d.r. a v.a. ξ condiționată de evenimentul $\eta = y$; 2) d.r. a v.a. η condiționată de evenimentul $\xi = x$; 3) funcția de regresie a v.a. ξ în raport cu η ; 4) funcția de regresie a v.a. η în raport cu ξ.

5. ELEMENTE DE TEORIA INFORMAȚIEI

5.1. Obiectul de studiu al Teoriei Informației

Teoria Informației (TI) ***studiază modele matematice (preponderent statistico-probabiliste) ale fenomenelor legate de recepționarea, stocarea şi transmiterea informației***. Părintele TI este Claude Shannon, anul 1948 fiind considerat anul apariției acestei teorii.

Noțiunea de informație este o noțiune primară, adică imposibil de încadrat într-o definiție strictă, la fel ca şi noțiunea de punct în geometrie sau noțiunea de mulțime din Teoria Mulțimilor. Încercând, totuşi, să o explicăm, am putea spune ca ***informația pentru un sistem oarecare, biologic sau tehnic, este un mesaj despre evenimente care au sau au avut sau vor avea loc atât în exteriorul sistemului cât şi în interiorul lui.***

Menționăm că între *informație* şi *nedeterminare* există o legătură strânsă. O ***informație este informație, în sensul adevărat al cuvântului, dacă şi numai dacă ea înlătură o anumită nedeterminare.***

Într-un experiment se obține o informație numai atunci când nu cunoaştem rezultatul său înainte de efectuarea experimentului, adică numai atunci când rezultatul înlătură nedeterminarea care exista la început. Mai mult, cu cât nedeterminarea de la începutul experimentului este mai mare, cu atât mai mare va fi cantitatea de informație pe care o obținem atunci când aflăm rezultatul experimentului.

5.2. Entropia ca masură a nedeterminării cantității de informație

În cazul unui eveniment aleator A asociat experimentului aleator $\mathcal{E}$ şi pentru care probabilitaea sa $\mathbf{P}(A)>0$, Claude Shannon defineşte cantitatea de informație ce se conține în mesajul "*s-a produs evenimentul A*" ca fiind numărul $I(A) = -log_2\mathbf{P}(A)$. Cea mai mică unitate a cantității de informație se numeşte *bit*, unde $I(A) = 1bit$ atunci când $\mathbf{P}(A)=1/2$.

Evident, $I(A)$ poate fi interpretată şi ca măsura nedeterminării legate de producerea evenimentului A. Această nedeterminare va fi cu atât mai mare cu cât probabilitatea $\mathbf{P}(A)$ va fi mai mică. În extremis, gradul de nedeterminare este egal cu 0 dacă $\mathbf{P}(A)=1$.

Ne interesează măsura nedeterminării înlăturate sau cantitatea de informație furnizată de realizarea unui experiment aleator $\mathcal{E}$. Pentru aceasta presupunem că în acest experiment observatorul este interesat (înregistrează) în producerea unuia din evenimentele A_1 , A_2 ,…, A_n care alcătuiesc un ***grup complet de evenimente***, *adică acestea sunt disjuncte două câte două si suma lor coincide cu evenimentul sigur*. Realizarea efectivă a experimentului $\mathcal{E}$, înregistrarea unui anumit eveniment dintre evenimentele A_1 , A_2 ,…, A_n , ca rezultat al experimentului, înlătură nedeterminarea pe care am avut-o la început.

Exemplu. Fie două experimente aleatoare:
$\mathcal{E}_1$≡aruncarea unei monede "perfecte" şi grupul complet de evenimente $A_1=\{aparitia\ stemei\}=\{S\}$, $A_2=\{aparitia\ banului\}=\{B\}$
$\mathcal{E}_2$≡aruncarea unei monede deformate, astfel încât $\boldsymbol{P}\{S\}=0.9$, $\boldsymbol{P}\{B\}=0.1$.
Avem, astfel, repartițiile corespunzătoare:

$$\mathcal{E}_1: \begin{pmatrix} S & B \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2: \begin{pmatrix} S & B \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Evident, $\mathcal{E}_1$ conține mai multă nedeterminare decât $\mathcal{E}_2$,fapt care poate fi confirmat folosind noțiunea de **entropie** definită în continuare.

Fie un experiment aleator $\mathcal{E}$ în care putem observa, în urma efectuării lui, unul din evenimentele A_1 , A_2 ,…, A_n, care alcătuiesc un grup complet de evenimente. Presupunem că $p_i=\boldsymbol{P}(A_i)>0$, $i=1,...,n$. Cantitatea de informație I furnizată în urma efectuării experimentului $\mathcal{E}$ depinde de evenimentul A_i care se va produce, prin urmare aceasta este o v.a. dată de repartiția

$$I: \begin{pmatrix} I(A_1) & I(A_2) & \ldots & I(A_n) \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, p_i>0\ ,\ i=1,\ldots,n\ ,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (1)$$

Anume valoarea medie MI a acestei v.a. poate fi luată în calitate de măsurător al cantității de informație (gradului de nedeterminare furnizat de experimentul $\mathcal{E}$). Mai exact, putem da următoarea

Definiție. Vom numi ***entropie*** sau ***măsură a nedeterminării*** sau ***cantitate de informație*** a experimentului $\mathcal{E}$ numărul

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i,$$

considerând că $p\cdot \log_2 p=0$ dacă $p=0$.

Revenind la exemplul de mai sus, constatăm ca entropiile lor sunt egale cu $H(\mathcal{E}_1)=1bit$, $H(\mathcal{E}_2)= -(0.9 \log_2 0.9+0.1 \log_2 0.1)< H(\mathcal{E}_1)$ deoarece funcția $H(p)= -(p \log_2 p+(1-p) \log_2 (1-p)$ are valoare maximală, egala cu 1, pentru $p=0.5$.

5.3. Proprietățile entropiei

Entropia are un şir de proprietăți, cele mai importante fiind prezentate în următoarele teoreme.

Teorema 1. *Entropia $H(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ ce corespunde experimentului $\mathcal{E}$ cu repartiția (1) are următoarele proprietăți :*

a) $H(p_1,p_2,\ldots,p_n)\geq 0;$
b) *$H(p_1,p_2,\ldots,p_n)=0$ dacă şi numai dacă există un indice i_o astfel încât $p_{io} =1;$*
c) *$H(p_1,p_2,\ldots,p_n)\leq H(1/n,1/n,\ldots 1/n)$ pentru orice $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$, $p_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1;$*
d) $H(p_1,p_2,\ldots,p_n , 0)= H(p_1,p_2,\ldots,p_n).$

Având două experimente independente $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ putem defini entropia experimentului $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ ce constă în efectuarea lor simultană. Notăm entropia experimentului cu $H(\mathcal{E})$. Are loc

Teorema 2. $H(\mathcal{E}) =H(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)= H(\mathcal{E}_1)+ H(\mathcal{E}_2).$

Exemplu. Considerăm în calitate de experiment aleator $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ aruncarea simultană a două monede perfecte, $\mathcal{E}_1$ fiind aruncarea primei monede, iar $\mathcal{E}_2$ aruncarea celei de-a doua monede. Evident, $H(\mathcal{E}_1)$ = $H(\mathcal{E}_2)$=1bit, dar cantitatea de informaţie $I(\mathcal{E})$ furnizată de rezultatul efectuării experimentului $\mathcal{E}$ este o v.a. cu repartiţia

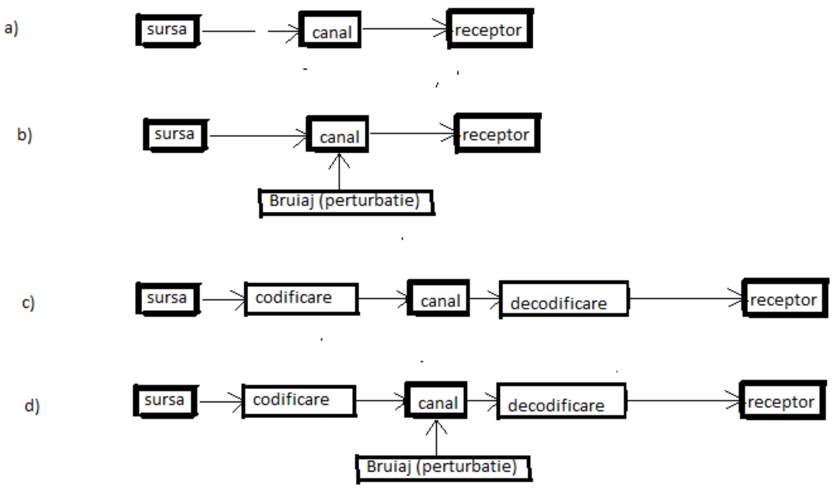
$$I:\begin{pmatrix} I(SS) & I(SB) & I(BS) & I(BB) \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$H(\mathcal{E})=H(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)= =-\sum_{i=1}^{n}(1/4)\log_2(1/4)=2bit=H(\mathcal{E}_1)+H(\mathcal{E}_2).$$

5.4. Transmiterea informaţiei. Codificarea. Teoreme de codificare

Orice sistem de transmitere a informaţiei se încadrează în una din următoarele scheme generale:



Pentru a înţelege rolul noţiunii de entropie în Teoria Informaţiei ne vom referi în continuare, drept exemplu, la schema c) de transmitere a infpormaţiei cu codificare/decodificare, dar fără bruiaj. Dar pentru început vom vedea ce reprezintă codificarea/decodificarea în sistemele de comunicație de orice natură, pornind de la următorul

Exemplu. Considerăm trimiterea unui mesaj prin sistemul SMS (sistem de mesaje scurte) al unui telefon mobil. Pentru aceasta folosim, initial, în calitate de semnale caracterele tastaturii QWERTY, numărul lor total fiind notat cu N. Cu alte cuvinte, aceste caractere formează o mulțime $\mathcal{X}=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ de semnale. În momentul trimiterii lui (apăsării butonului "send") fiecare semnal/caracter x din $\mathcal{X}$ este codificat digital, adică cu ajutorul unei mulțimi de semnale simple $\mathcal{Y}=\{y_1,y_2,\ldots,y_Q\}=\{0,1\}$.

Definiție. Vom numi *codificare (codare)* asocierea la un anumit sistem de semnale care poartă o informație (mesaj) a unor succesi-uni/şiruri de semnale a unui alt sistem de semnale. Primele se numesc *semnale initiale*, celelalte se numesc *semnale simple.*

Este firesc ca multimea $\mathcal{Y}$ de semnale simple să conțină mai puține semnale decât multimea $\mathcal{X}$ ceea ce se şi întâmplă în exemplul nostru, $Q<N$.

În Teoria Informației se folosesc, în funcție de rezultatele scontate, diferiți algoritmi de codare/decodare.

Motivele care ne conduc la necesitatea codării informației sunt multiple. Iată câteva dintre ele:

a) natura sistemului concret de transmitere a informației (telegraf, telefon mobil, sistemul Morsez etc.) implică un anumit mod de codare;

b) prezența bruiajelor (perturbațiilor) canalelor de transmitere a informației implică utilizarea codării pentru a diminua efectul nociv asupra corectitudinii informației recepționate;

c) la fel, caracterul intim, secret al informației implică codarea acesteia.

Observatie. Motive de tipul c) pot avea drept consecință faptul că, uneori, $card\ \mathcal{Y} \geq card\ \mathcal{X}$.

Fie $\mathcal{X}=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ mulțimea de semnale inițiale, iar $\mathcal{Y}=\{y_1,y_2, \ldots,y_Q\}$ multimea de semnale simple. În procesul alcătuirii/trimiterii unui mesaj (unei informații), folosind semnalele din $\mathcal{X}$, fiecare x_i din $\mathcal{X}$ are o anumită probabilitate (frecvență relativă) $p(x_i)$ cu care se întâlneşte]n acest mesaj, unde $\sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1$.

Să luăm, drept exemplu, mesajul "***mâine* □ *va* □ *ploua***". Acesta are lungimea 14, incluzând simbolul "pauză"- "□ ", iar semnalele "*m*", "*a*" şi "*b*", luate ca exemplu, au frecvenţa relativă egală, respectiv, cu $p(m)=1/14,\ p(a)=1/7,\ p(b)=0$. Prin urmare, transmiterii unui mesaj $\mathcal{E}$ i se poate asocia cantitatea de informaţie $H(\mathcal{E})$. Cum în procesul codării (criptării) fiecărui semnal x_i i se asociază un şir de semnale simple din $\mathcal{Y}$, şirul având lungimea n_i, $i=1,2,...,N,$ atunci putem calcula lungimea medie L a unui şir de semnale simple folosite în procesul de codare:

$$L = \sum_{i=1}^{N} n_i p(x_i)\,.$$

Acum putem formula, drept exemplu, două rezultate teoretice ce vizează procesul de codificare a semnalelor transmise prin intermediul unui sistem/canal de transmitere a informatiei fără bruiaj, rezultate care arată care sunt limitele şi posibilităţile codificarii.

Propoziţie. *Pentru ca să fie posibilă codificarea prin intermediul şirurilor de semnale simple de lungimea* n_i, $i=1,2,...,N,$ *care să fie ataşate semnalelor iniţiale* $x_1,x_2,...,x_N$, *este* ***necesar şi suficient*** *să fie îndeplinită inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{N} Q^{-n_i} < 1\,.$$

Teorema codificării. *Ca să putem efectua o codificare, folosind Q semnale simple, pentru a transmite o cantitate de informaţie* $H(\mathcal{E})$, *este* <u>necesar</u> *ca lungimea medie L a şirurilor de codificare, ataşate semnalelor iniţiale din multimea* $\mathcal{X}$, *purtătoare de informaţie, să nu fie inferioară numărului* $H(\mathcal{E})/\log_2 Q$, *adică* $L \geq H(\mathcal{E})/\log_2 Q$.

Exemplu (***continuare***). În directă legatură cu trimiterea mesajului "***mîine* □ *va* □ *ploua***", respectiv, experimentul $\mathcal{E}$, cantitatea de informaţie I va fi o v.a. cu repartiţia

$$I:\ \begin{pmatrix} I(\hat{a}) & I(a) & I(e) & I(o) & I(u) & I(i) & I(m) & I(n)\ldots & I(v) & I(\_) \\ 1/14 & 2/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14 & 1/14\ldots & 1/14 & 2/14 \end{pmatrix}$$

Prin urmare $H(\mathcal{E})=2[-(2/14)\cdot\log_2(2/14)]+ 12[-(1/14)\cdot\log_2(1/14)]=$
$= \log_2 14 - 2/7 \approx 3.81-0.29=3.52.$

În cazul codificării digitale $\mathcal{Y}=\{0,1\},\ Q=2.$Deci, ca acest mesaj să poată fi codificat digital este necesar ca lungimea medie a şirurilor de codificare să fie mai mare sau egală cu $H(\mathcal{E})/\log_2 Q=3.52.$

BIBLIOGRAFIE

1. Poştaru A., Leahu A. Probabilitate, Procese aleatoare şi aplicaţii, Chişinău, Ştiinţa, 1991.

2. Ciumac P., Ciumac V., Ciumac M. Teoria Probabilităţilor şi elemente de Statistică Matematică, Chişinău , 2003.

3. Silviu Guiaşu, Radu Theodorescu, Matematica şi Informaţia, Bucuresti, Edit. Stiintifică, 1967.

4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. (под ред. А.А.Свешникова), Наука, Москва, 1970.

5. G. A. Marin, Probability for Computer Scientists http://my.fit.edu/~gmarin/CSE5231/ProbabilityBasics.pdf

Teoria Probabilităților şi a Informației în Sistemul de programe Mathematica

(Teorie, indicații metodice şi probleme propuse)

Autori: I. Balmuş
Gh. Ceban
A. Leahu
I. Lisnic

Redactor E. Gheorghişteanu

Bun de tipar 06.06.17 Formatul 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO Tirajul 50 ex.
Coli de tipar 8,25 Comanda nr. 54

2004, UTM, Chişinău, bd. Ştefan cel Mare şi Sfânt 168
Editura „Tehnica-UTM"
2045, Chişinău, str. Studenților, 9/9